

UNIwersytet im. Adama Mickiewicza  
Wydział Fizyki

Adam Miranowicz

Superpozycje stanów,  
rozkłady fazowe i quasi-prawdopodobieństwa  
kwantowych pól optycznych

Rozprawa doktorska z fizyki teoretycznej  
wykonana pod kierunkiem  
Profesora doktora habilitowanego Ryszarda Tanasia

Poznań 1994

*We all know what light is;  
but it is not easy to tell what it is.*

SAMUEL JOHNSON

*Dialog z przyrodą musi być prowadzony w języku matematyki, w przeciwnym razie przyroda nie odpowiada na nasze pytania.*

MICHAŁ HELLER

*Grammatici certant et adhuc  
sub indice lis est.*

HORACY

# PODZIĘKOWANIA

Z prawdziwą przyjemnością składam podziękowania Promotorowi pracy, Panu profesorowi doktorowi habilitowanemu **Ryszardowi Tanasiowi** za zainteresowanie mnie optyką kwantową, za przekazaną mi wiedzę, wielką życzliwość, poświęcony czas, wielorakie inspiracje i wspaniałą współpracę, a przede wszystkim za swój pełen entuzjazmu stosunek do fizyki, który mi przekazał.

Śp. Panu profesorowi doktorowi habilitowanemu **Stanisławowi Kielichowi**, mojemu Mistrzowi, będę zawsze głęboko wdzięczny za otwarcie mi wrót do świata wiedzy, za rozmowy i cenne sugestie oraz za niezwykle serdeczną opiekę naukową.

Mojemu opiekunowi podczas studiów w Oksfordzie, Panu doktorowi **Stephenowi M. Barnettowi** serdecznie dziękuję za iście polską gościnność, za życzliwość, niezwykle inspiracje naukowe, wielogodzinne rozmowy i owocną współpracę.

Chciałbym także podziękować moim współpracownikom, którzy bezpośrednio lub pośrednio przyczynili się do uzyskania przeze mnie niektórych wyników przedstawionych w tej rozprawie. Byli to, w kolejności alfabetycznej: dr hab. **Jiří Bajer**, dr **Maria Dębska-Kotłowska**, dr **Artur Ekert**, dr **Tserensodnomyn Gantsog**, dr **Bruno Huttner**, dr **Per Johansen**, mgr **Krzysztof Piątek**, dr hab. **Przemysław Szlachetka** i dr **Tony Wilson**.

Osobne podziękowania składam Profesorom: **Janowi Peřinie**, **Peterowi Knightowi**, **Robertowi Harrisonowi**, **Laszlo Solymarowi**, **Aleksandrowi S. Szumowskiemu**, **Olemu Kellerowi** i **Władimirowi S. Jaruninowi** za ich gościnność oraz umożliwienie mi przedstawienia wyników mojej pracy na seminariach i konferencjach.

Moim miłym obowiązkiem jest podziękowanie **Fundacji Sorosa (Stefan Batory Trust)** za nagrodzenie mnie rocznym stypendium na Uniwersytecie Oksfordzkim.

Wreszcie pragnę złożyć najgorętsze podziękowania tym, którym zawdzięczam najwięcej – moim **Rodzicom**.

# SPIS TREŚCI

WSTĘP .....	7
I. ROZKŁADY QUASI-PRAWDOPODOBIENSTWA .....	10
1. Wielomodowe sparometryzowane rozkłady <i>quasi</i> -prawdopodobieństwa .....	11
2. Rozkłady <i>quasi</i> -prawdopodobieństwa w opisie pól jednomodowych .....	16
2.1 Stany koherentne, idealne stany ścięśnione oraz przesunięte stany fokowskie .....	17
2.2 Stany koherentne Titulaera-Glaubera: ewolucja oscylatora anharmonicznego .....	20
3. Rozkłady <i>quasi</i> -prawdopodobieństwa w opisie pól dwu- i trójmodowych: rozpraszanie ramanowskie .....	27
3.1 Równanie Fokkera-Plancka .....	33
3.1.1 Opis w pełni kwantowy .....	35
3.1.2 Opis w przybliżeniu parametrycznym .....	39
3.1.3 Zagadnienie istnienia sparometryzowanych rozkładów <i>quasi</i> -prawdopodobieństwa .....	46
3.2 Równanie fundamentalne w reprezentacji fokowskiej .....	51
3.2.1 Opis w pełni kwantowy .....	52
3.2.2 Opis w przybliżeniu parametrycznym .....	57
4. Rozkłady <i>quasi</i> -prawdopodobieństwa w opisie kwantowych własności pól optycznych .....	60
4.1 Dyskretne superpozycje stanów koherentnych .....	61
4.2 Statystyka liczby fotonów oraz ścięśnianie światła .....	81
4.2.1 Model oscylatora anharmonicznego .....	87
4.2.2 Rozpraszanie ramanowskie .....	96

<b>II. ROZKŁADY FAZOWE</b> .....	116
5. Rozkład fazowy Pegga-Barnetta .....	118
5.1 Formalizm Pegga-Barnetta: hermitowski operator fazy .....	119
5.2 Związki między rozkładami <i>quasi</i> -prawdopodobieństwa a rozkładem Pegga-Barnetta .....	123
5.3 Rozkład fazowy Pegga-Barnetta dla stanów koherentnych w skończenie-wymiarowej przestrzeni $\Psi$ .....	125
6. Rozkład fazowy Garrisona-Wonga .....	136
6.1 Formalizm Garrisona-Wonga: hermitowski operator fazy .....	137
6.2 Porównanie rozkładów Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga .....	142
7. Sparametryzowane rozkłady fazowe .....	151
7.1 Ogólne wyrażenia na sparametryzowane rozkłady fazowe .....	152
7.2 Porównanie sparametryzowanych rozkładów fazowych z rozkładem Pegga-Barnetta .....	156
7.2.1 Stany koherentne Glaubera i Titulaera-Glaubera .....	159
7.2.2 Idealne stany ścieśnione .....	162
7.2.3 Przesunięte stany fokowskie .....	165
7.3 Rozkłady fazowe w opisie dyskretnych superpozycji stanów koherentnych .....	170
7.4 Rozkłady fazowe i <i>quasi</i> -prawdopodobieństwa w opisie dyfuzji fazy ...	179
<b>PODSUMOWANIE</b> .....	183
<b>UZUPEŁNIENIA</b>	
Uzupełnienie A. Wyprowadzenie równania fundamentalnego ( 69) .....	189
Uzupełnienie B. Przybliżone rozwiązanie równania Fokkera-Plancka ( 77) .....	191

Uzupełnienie C. Ścisłe rozwiązanie równania fundamentalnego ( 110) w reprezentacji fokowskiej .....	193
Uzupełnienie D. Pole antystokesowskie w rozpraszaniu ramanowskim: rozwiązanie równania fundamentalnego .....	196
Uzupełnienie E. Krótkoczasowe rozwiązania równania fundamentalnego ( 110) .	198
Uzupełnienie F. Stany koherentne w skończonej-wymiarowej przestrzeni $\Psi$ : elementy konstrukcji .....	204
Uzupełnienie G. Sparametryzowany rozkład fazowy $P^{(1)}(\theta)$ dla stanów koherentnych .....	214
Uzupełnienie H. Dyfuzja fazy w modelu tłumionego oscylatora anharmonicznego .....	217
<b>LITERATURA</b> .....	220
<b>INDEKS CYTOWAŃ</b> .....	241

# WSTĘP

Celem niniejszej pracy jest opis kilku konkretnych stanów pola przy pomocy  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa (QPD) oraz rozkładów fazowych ( $s$ -sparametryzowanych, Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga). Zwrócimy szczególną uwagę na możliwość zastosowania powyższych rozkładów w analizie nieklasycznych pól promieniowania, np. kwantowej superpozycji makroskopowo rozróżnialnych stanów (tzw. kotów i kociąt schrödingerskich), światła ściśnionego (ściśniętego), lub światła o subpoissonowskiej statystyce liczby fotonów. Ponadto pragniemy podać ogólne związki, zaznaczyć podobieństwa i różnice między różnymi rozkładami w opisie dowolnych, jak i konkretnych pól promieniowania. Praca ta stanowi pierwszy etap podjętych przez autora badań.

Dysertacja została podzielona na dwie zasadnicze części, w których dokonaliśmy analizy pól przy pomocy (I) rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa oraz (II) rozkładów fazowych. Ogólne związki między tymi rozkładami przedstawimy w części II.

W rozdziale 1 przytoczymy podstawowe definicje wielomodowych  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa, a także z nimi związanych  $s$ -sparametryzowanych funkcji charakterystycznych. Do tych definicji będziemy się odwoływać w całej pracy.

W rozdziale 2, korzystając z  $s$ -sparametryzowanych QPD, przedstawimy ewolucję konkretnych jednomodowych stanów pola: glauberowskich stanów koherentnych, idealnych stanów ściśnionych, przesuniętych stanów fokowskich oraz stanów koherentnych Titulaera-Glaubera.

W rozdziale 3  $s$ -sparametryzowane QPD zastosujemy do opisu dwu- i trójmodowych pól w rozpraszaniu ramanowskim. W §3.1 podamy analizę pól w ujęciu całkowicie kwantowym oraz w przybliżeniu parametrycznym stosując metodę równania Fokkera-Plancka oraz równania ruchu dla  $s$ -sparametryzowanych funkcji charakterystycznych. Zajmiemy się także zagadnieniem istnienia  $s$ -sparametryzowanych QPD. W §3.2 przedstawimy kwantowy opis rozpraszania ramanowskiego oparty na równaniu fundamentalnym dla zredukowanej macierzy gęstości w reprezentacji fokowskiej. Roz-

wiązanie powyższego równania w prosty sposób powiążemy z  $s$ -sparametryzowanymi QPD.

W rozdziale 4 wykorzystamy  $s$ -sparametryzowane QPD jako reprezentacje kwantowych własności jedno- i dwumodowych pól optycznych. Dyskretne superpozycje makroskopowo rozróżnialnych stanów oraz zjawisko ścięśniania omówimy na przykładzie oscylatora anharmonicznego. Model rozpraszania ramanowskiego posłuży nam do analizy statystyki liczby fotonów (pola pompującego i rozproszonych) oraz możliwości ścięśnienia pól rozproszonych.

W rozdziale 5, otwierającym część drugą dysertacji, omówimy rozkład fazowy w formalizmie hermitowskiego operatora fazy Pegga-Barnetta. W §5.1 podamy podstawowe definicje. W §5.2 określimy związki między rozkładem fazowym Pegga-Barnetta a  $s$ -sparametryzowanymi QPD. W §5.3 otrzymamy rozkład Pegga-Barnetta dla stanów koherentnych w skończenie-wymiarowej przestrzeni stanów.

W rozdziale 6 przedstawimy porównanie formalizmów Garrisona-Wonga i Pegga-Barnetta m. in. na przykładzie rozkładów fazowych dla kilku konkretnych stanów pola.

W rozdziale 7 zbadamy  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe zdefiniowane jako marginalne  $s$ -sparametryzowane QPD. Podamy ogólne wyrażenie na te rozkłady w §7.1. Porównanie z rozkładem Pegga-Barnetta przedstawimy w §7.2 na przykładach stanów koherentnych, idealnych stanów ścięśnionych i przesuniętych stanów fokowskich. W §7.3 powrócimy do zagadnienia dyskretnych superpozycji stanów koherentnych, tym razem reprezentowanych przez różne rozkłady fazowe. W §7.4 opiszemy dyfuzję fazy w tłumionym i wzmacnianym oscylatorze anharmonicznym metodą równania Fokkera-Plancka i równania fundamentalnego w reprezentacji fokowskiej.

W podsumowaniu zestawimy najistotniejsze wyniki dysertacji.

W uzupełnieniach A–H podamy szczegółowe wyprowadzenia niektórych wyników pracy oraz rozważymy szczególne przypadki rozwiązań. Podamy wzory niezbędne dla matematycznej spójności pracy, które umieszczone bezpośrednio w tekście nadałyby rozprawie formę mniej przejrzystą. W uzupełnieniu A wyprowadzimy równanie funda-



mentalne dla całkowicie kwantowego modelu rozpraszania ramanowskiego. W uzupełnieniach B i E podamy przybliżone rozwiązanie równania Fokkera-Plancka dla trój- i dwumodowego modelu rozpraszania ramanowskiego, a w dodatkach C i D znajdziemy ściśle rozwiązanie równań ruchu dla rozkładów dwumodowych. W uzupełnieniu F podamy szereg własności współczynników rozwinięcia (w reprezentacji fokowskiej) skończenie-wymiarowych stanów koherentnych. Zamieścimy również szczególne przypadki tych stanów dla przestrzeni o kilku wymiarach. W uzupełnieniu G pokażemy, że nasze ogólne wzory określające  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe są słuszne także w przypadku granicznym  $s \mapsto 1$ . W uzupełnieniu H przedstawimy wyniki, których nie zamieściliśmy w §7.4, a które są istotne dla kompletności dyskusji zagadnienia dyfuzji fazy w modelu tłumionego oscylatora anharmonicznego.

W indeksie cytowań wymienimy prace, w których są cytowane artykuły autora niniejszej rozprawy.

Naszym zamiarem było zamieszczenie bogatej literatury związanej z zagadnieniami poruszonymi w dysertacji. Oczywiście zdajemy sobie sprawę, że przedstawiona bibliografia nie jest kompletna. Zacytowaliśmy tylko takie prace, które naszym zdaniem były najistotniejsze dla realizacji celu rozprawy.

# I. ROZKŁADY QUASI-PRAWDOPODOBIENSTWA

Zasada nieoznaczoności w pewnym sensie podważa sensowność koncepcji przestrzeni fazowej w mechanice kwantowej. Cząstka nie może mieć równocześnie dobrze określonego położenia i pędu, zatem nie można określić prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w położeniu  $q$  mającej pęd  $p$ . Inaczej mówiąc, nie da się zdefiniować „prawdziwego” rozkładu prawdopodobieństwa w przestrzeni fazowej dla cząstki kwantowej. Niemniej, można wprowadzić funkcje, które są jego namiastką – tzw. rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa<sup>1</sup> (QPD – oznaczenie stosowane w literaturze anglosaskiej). Rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa są stosowane w wielu dziedzinach fizyki kwantowej, a w szczególności w optyce kwantowej. Warto podkreślić, że znaczenie tych funkcji (reprezentacji) nie sprowadza się jedynie do wygodnej metody rachunkowej, ale daje także wgląd w zależności między mechaniką kwantową i klasyczną. Pierwszym rozkładem *quasi*-prawdopodobieństwa była funkcja wprowadzona przez Wignera [1]. Opis ewolucji optycznych pól kwantowych za pomocą rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa został wprowadzony do optyki kwantowej przez Glaubera [2, 3, 4], Cahilla [5] oraz Klaudera i in. [6]. Ogólne twierdzenia dotyczące uporządkowania operatorów, będące podstawą definicji sparametryzowanych QPD, podali Agarwal i Wolf [7]. Jednomodowe  $s$ -sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa i  $s$ -sparametryzowane funkcje charakterystyczne zostały zdefiniowane przez Cahilla i Glaubera [8]. Zanalizowali oni różne zasady odpowiedniości między operatorami i funkcjami klasycznymi. Przegląd rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa stosowanych w optyce kwantowej można znaleźć m. in. w artykułach: Cahilla i Glaubera [8], Drummonda i Gardinera [9], Tatarskiego [10], Hillery’ego i in. [11], Lu, Zhu i Agarwala [12], Milburna i Wallsa [13], Vogela i Riskena [14], Wünsche’go [15], Braunsteina, Cavesa i Milburna [16], Moya-Cessa’ego i Knighta [17] oraz w podręcznikach: Klaudera i Sudarshana [18], Louisella [19], Riske-

---

<sup>1</sup>ang. *quasi*-probability distribution; ros. kwaziwierojaťnostnyje raspriedelenie lub raspriedelenie kwaziwierojaťnosti, jak również terminy: *quasi*-rozkład prawdopodobieństwa, niby-rozkład; ang. *quasi*-distribution; ros. kwaziraspriedelenie

na [20], Gardinera [21, 22], Białyńskiego-Biruli, Cieplaka i Kamińskiego [23] i Peřiny [24].

W pierwszej części niniejszej dysertacji opiszemy wybrane kwantowe pola optyczne za pomocą sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa.

# 1 Wielomodowe sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa

W tym paragrafie przypomnimy kilka podstawowych definicji i własności wielomodowych  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa i funkcji charakterystycznych.

Podstawą naszych rozważań w dalszych rozdziałach będą operatorowe równania ruchu. W celu ich rozwiązania skorzystamy z klasycznych jedno- i wielomodowych reprezentacji  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  i  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$  operatora gęstości  $\hat{\rho}(\{\hat{a}_k\})$ . Funkcje wielomodowe są prostym uogólnieniem reprezentacji Cahilla i Glaubera dla pól jednomodowych [8]. Równania ruchu dla  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  i  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$  są nieoperatorowymi równaniami różniczkowymi. Zatem, aby je rozwiązać można stosować klasyczne metody analizy matematycznej.

Wielomodowe sparametryzowane funkcje charakterystyczne  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$  dogodnie jest zdefiniować jako wartość średnią

$$\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\}) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \hat{D}^{(s)}(\{\beta_k\}) \right] \quad (1)$$

wielomodowego  $s$ -sparametryzowanego operatora przesunięcia

$$\hat{D}^{(s)}(\{\beta_k\}) = \prod_{k=1}^M \hat{D}^{(s)}(\beta_k) = \prod_k \exp \left( \beta_k \hat{a}_k^+ - \beta_k^* \hat{a}_k + \frac{s}{2} |\beta_k|^2 \right), \quad (2)$$

gdzie ciągły parametr  $s$  jest liczbą rzeczywistą z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ . Bozonowe operatory kreacji (anihilacji) są oznaczone przez  $\hat{a}^+$  ( $\hat{a}$ ). Zastosowaliśmy w równaniach (1) i (2) uproszczoną notację optycznych pól wielomodowych (powiedzmy o  $M$

modach), mianowicie symbol  $(\{\beta_k\})$  oznacza  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M)$ . Transformata Fouriera funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$  (1) definiuje  $s$ -sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$ ,

$$\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) = \int \mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\}) \exp \left[ \sum_k (\alpha_k \beta_k^* - \alpha_k^* \beta_k) \right] d^2 \{\beta_k / \pi\}. \quad (3)$$

Dla kompletności rozważań podamy transformatę odwrotną do (3), która umożliwia wyznaczenie funkcji charakterystycznej z rozkładu  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$ :

$$\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\}) = \int \mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) \exp \left[ \sum_k (\alpha_k^* \beta_k - \alpha_k \beta_k^*) \right] d^2 \{\alpha_k / \pi\}, \quad (4)$$

gdzie całkowanie przebiega po

$$d^2 \{\alpha_k / \pi\} = \prod_k \pi^{-1} d^2 \alpha_k = \pi^{-M} \prod_{k=1}^M d(\operatorname{Re} \alpha_k) d(\operatorname{Im} \alpha_k). \quad (5)$$

i podobnie po  $\beta_k$ . Następujące warunki normalizacji są spełnione

$$\int \mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) d^2 \{\alpha_k / \pi\} = \mathcal{C}^{(s)}(0) = 1. \quad (6)$$

Czasem inaczej definiuje się unormowaną funkcję  $\overline{\mathcal{W}}^{(s)}(\{\alpha_k\}) = \mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) / \pi^M$ , co prowadzi do warunku

$$\int \overline{\mathcal{W}}^{(s)}(\{\alpha_k\}) d^2 \alpha_k = 1. \quad (7)$$

Symetria transformat Fouriera (3) i (4) dla  $\overline{\mathcal{W}}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  i  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$  zostaje jednak złamana. Aby uniknąć tej asymetrii będziemy korzystać z funkcji  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$ . Taką definicję sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa podali w swej fundamentalnej pracy Cahill i Glauber [8]. Oczywiście, w ścisłym sensie termin rozkład *quasi*-prawdopodobieństwa dotyczy funkcji  $\overline{\mathcal{W}}^{(s)}(\{\alpha_k\})$ , a nie  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$ . Jednak będziemy stosować ten termin również w odniesieniu do  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  (3), pamiętając o dobrze dobranej mierze całkowania (5). Tę konwencję stosuje wielu autorów (vide e.g. [8, 19, 13]).

W trzech szczególnych przypadkach, gdy  $s = -1, 0, 1$  funkcja  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  redukuje się odpowiednio do trzech powszechnie stosowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa [8, 10, 11, 18, 24, 25]: funkcji  $Q$  Husimiego [26], funkcji  $W$  Wignera [1]

oraz funkcji  $P$  Glaubera-Sudarshana [4, 27]:

$$Q(\{\alpha_k\}) = \langle \{\alpha_k\} | \hat{\rho} | \{\alpha_k\} \rangle = \mathcal{W}^{(-1)}(\{\alpha_k\}), \quad (8a)$$

$$W(\{\alpha_k\}) = \mathcal{W}^{(0)}(\{\alpha_k\}), \quad (8b)$$

$$P(\{\alpha_k\}) = \pi^{-M} \mathcal{W}^{(1)}(\{\alpha_k\}). \quad (8c)$$

Można powiedzieć, że  $s$ -sparametryzowany rozkład *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}$  (gdzie  $s$  przebiega wartości od -1 do 1) jest ciągłą interpolacją między funkcjami  $P$  i  $Q$ . Gdy znamy którąkolwiek z funkcji  $W^{(s)}$  (w szczególności dla  $s = -1, 0, 1$ ) to można skonstruować wszystkie elementy macierzy gęstości  $\hat{\rho}$ . Jednakże,  $s$ -sparametryzowany rozkład  $W^{(s)}$  określa bezpośrednio wartości średnie  $s$ -uporządkowanych operatorów anihilacji i kreacji. W szczególności, funkcja  $Q$  może służyć do bezpośredniego wyznaczenia wartości oczekiwanych operatorów  $\hat{a}_k^\pm$  w porządku antynormalnym, funkcja  $P$  – wartości średnich operatorów w porządku normalnym, a funkcja Wignera – operatorów w porządku symetrycznym. Dla dowolnego parametru  $s$  zachodzą następujące zależności:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_k (\hat{a}_k^+)^{m_k} (\hat{a}_k)^{n_k} \right\rangle_{(s)} &= \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \left\{ \prod_k (\hat{a}_k^+)^{m_k} (\hat{a}_k)^{n_k} \right\}_{(s)} \right] \\ &= \int \mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) \prod_k (\alpha_k^*)^{m_k} (\alpha_k)^{n_k} d^2 \{\alpha_k/\pi\} \quad (9) \\ &= \prod_k \frac{\partial^{m_k}}{\partial \beta_k^{m_k}} \frac{\partial^{n_k}}{\partial (-\beta_k^*)^{n_k}} \mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\}) \Big|_{\{\beta_k\}=0}, \end{aligned}$$

gdzie  $\{\beta_k\} = 0$  oznacza, że dla dowolnego modu  $k$  zachodzi  $\beta_k = 0$ . Ogólnie przyjętym kryterium, które może służyć jako definicja pól nieklasycznych, jest istnienie dodatnio określonego rozkładu  $P$ . Mówiąc dokładniej, stanem klasycznym nazywamy taki stan, dla którego funkcja  $P$  nie jest bardziej osobliwa niż funkcja  $\delta$  Diraca i jest nieujemna (np. [28]– [30], [24]). Zwróćmy uwagę, że termin „istnienie” funkcji został użyty w wąskim sensie. Jak pokazali Klauder i Sudarshan [18], funkcja  $P$  zawsze istnieje, ale często w formie bardzo osobliwych dystrybucji (funkcji uogólnionych). Z powyższej definicji

wynika, że kwantowo-statystyczne własności pól nieklasycznych nie mogą być w pełni opisane w ramach klasycznej teorii prawdopodobieństwa. Dokładną dyskusję zagadnienia istnienia rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  przedstawimy w §4.2.2 na przykładzie modelu rozpraszania ramanowskiego. Funkcja Wignera nie ma punktów osobliwych, ale może przyjmować wartości ujemne i w tym sensie nie jest „prawdziwą” (tj. klasyczną) funkcją rozkładu prawdopodobieństwa. <sup>2</sup> Funkcja  $Q$  posiada własności dobrze określonej klasycznej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa, tzn. jest nieujemna, ograniczona i nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Jednak tradycyjnie (choć nieprecyzyjnie) funkcję  $Q$  zalicza się do rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa [13]. W rozprawie przyjmujemy tę umowę. Funkcja  $Q$  odpowiada pewnej klasie równoczesnych pomiarów dwóch kanonicznie sprzężonych wielkości, takich jak operatory kwadraturowe pola.

Zapiszmy związek między  $s_1$ - i  $s_2$ -parametryzowanymi rozkładami, przy założeniu, że  $s_2 < s_1$ :

$$\mathcal{W}^{(s_2)}(\{\alpha_k\}, t) = \left(\frac{2}{s_1 - s_2}\right)^M \int \exp\left(-\frac{2}{s_1 - s_2} \sum_k |\alpha_k - \beta_k|^2\right) \times \mathcal{W}^{(s_1)}(\{\beta_k\}, t) d^2\{\beta_k/\pi\}. \quad (10)$$

Jak widać rozkład  $W^{(s_2)}$  jest określony przez splot rozkładu  $W^{(s_1)}$  z wielowymiarową funkcją gaussowską. Analogiczny związek dla funkcji charakterystycznych (1) przyjmuje prostszą postać:

$$\mathcal{C}^{(s_2)}(\{\beta_k\}, t) = \mathcal{C}^{(s_1)}(\{\beta_k\}, t) \exp\left(\frac{s_2 - s_1}{2} \sum_k |\beta_k|^2\right) \quad (11)$$

i jest słuszny dla dowolnych parametrów  $s_1$  i  $s_2$ . W przypadku, gdy  $s_1$ -parametryzowana QPD nie istnieje, wyznaczenie wartości średniej  $\langle \hat{a}^{+m} \hat{a}^n \rangle_{(s_1)}$  w porządku  $s_1$  nie jest problemem. Te wartości mogą być wyznaczone z odpowiednich  $s_1$ -parametryzowanych funkcji charakterystycznych  $\mathcal{C}^{(s_1)}$  na mocy relacji (9), lub równie dobrze z

---

<sup>2</sup>na marginesie, chcielibyśmy przytoczyć opinię niektórych fizyków (m.in. Stenholma [31]), że w pomiarach mierzymy jedynie dodatnio określone funkcje Wignera

$s_2$ -parametryzowanego rozkładu  $\mathcal{W}^{(s_2)}$ , na podstawie zależności:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_k (\hat{a}_k^+)^{m_k} (\hat{a}_k)^{n_k} \right\rangle_{(s_1)} &= \int \prod_k m_k! \left( \frac{s_2 - s_1}{2} \right)^{m_k} \\ &\times \alpha_k^{n_k - m_k} L_{m_k}^{n_k - m_k} \left( \frac{2|\alpha_k|^2}{s_1 - s_2} \right) \mathcal{W}^{(s_2)}(\{\alpha_k\}) d^2 \{\alpha_k/\pi\}, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie  $L_m^n(x)$  są uogólnionymi wielomianami Laguerre'a. Wreszcie, aby otrzymać momenty statystyczne  $\langle \hat{a}^{+m} \hat{a}^n \rangle_{(s_1)}$  w porządku  $s_1$  można skorzystać z uogólnionej reprezentacji  $P$  (dodatkowej reprezentacji  $P$ )<sup>3</sup> [9, 16, 32, 33, 34]. Do omówienia tej funkcji powrócimy w paragrafie 5.2.

W dysertacji będziemy wielokrotnie analizować elementy macierzowe w reprezentacji fokowskiej  $\langle \{n_k\} | \hat{\rho} | \{m_k\} \rangle$ . Dla kompletności dyskusji przedstawimy kilka relacji między funkcjami  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  i  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$  a macierzą gęstości  $\hat{\rho}(\{\hat{a}_k\})$ . Te relacje wynikają bezpośrednio ze wzorów Cahilla i Glaubera [8] dla pól jednomodowych. Niech operator  $\hat{T}(\{\alpha_k\})$  będzie transformatą Fouriera  $s$ -sparametryzowanego operatora przesunięcia  $\hat{D}^{(s)}(\{\beta_k\})$  ( 2):

$$\hat{T}^{(s)}(\{\alpha_k\}) = \int \hat{D}^{(s)}(\{\beta_k\}) \exp\left(\sum_k \alpha_k \beta_k^* - \text{c.c.}\right) d^2 \{\beta_k/\pi\}. \quad (13)$$

Wówczas macierz gęstości  $\hat{\rho}(\{\hat{a}_k\})$  może być wyliczona z  $s$ -sparametryzowanego rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  ( 3) dzięki relacji

$$\hat{\rho}(\{\hat{a}_k\}) = \int \mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) \hat{T}^{(-s)}(\{\alpha_k\}) d^2 \{\alpha_k/\pi\}. \quad (14)$$

Relacja odwrotna,

$$\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}(\{\hat{a}_k\}) \hat{T}^{(s)}(\{\alpha_k\}) \right], \quad (15)$$

przypomina wyrażenie ( 1) dla funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$ , która jest wartością oczekiwaną operatora przesunięcia  $\hat{D}^{(s)}(\{\alpha_k\})$ . Interesują nas relacje między  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  a elementami macierzy  $\hat{\rho}(\{\hat{a}_k\})$  w reprezentacji fokowskiej. Poszukiwane relacje wynikają z równań ( 14) i ( 15):

$$\langle \{n_k\} | \hat{\rho} | \{m_k\} \rangle = \int \mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) \langle \{n_k\} | \hat{T}^{(-s)}(\{\alpha_k\}) | \{m_k\} \rangle d^2 \{\alpha_k/\pi\}, \quad (16)$$

---

<sup>3</sup>ang. generalized  $P$ -representation, positive  $P$ -representation

$$\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) = \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \sum_{\{m_k\}=0}^{\infty} \langle \{n_k\} | \hat{\rho} | \{m_k\} \rangle \langle \{m_k\} | \hat{T}^{(s)}(\{\alpha_k\}) | \{n_k\} \rangle. \quad (17)$$

Elementy macierzowe w reprezentacji fokowskiej dla pól o  $M$  modach są prostymi iloczynami:

$$\langle \{n_k\} | \hat{T}^{(s)}(\{\alpha_k\}) | \{m_k\} \rangle = \prod_{k=1}^M \langle n_k | \hat{T}^{(s)}(\alpha_k) | m_k \rangle, \quad (18)$$

$M$  jednomodowych elementów macierzowych określonych przez Cahilla i Glaubera [8]:

$$\begin{aligned} \langle n_k | \hat{T}^{(s)}(\alpha_k) | n_k + \nu_k \rangle &= \sqrt{\frac{n_k!}{(n_k + \nu_k)!}} \left( \frac{2}{1-s} \right)^{\nu_k+1} \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^{n_k} \\ &\times \exp\left( -\frac{2}{1-s} |\alpha_k|^2 \right) L_{n_k}^{\nu_k} \left( \frac{4|\alpha_k|^2}{1-s^2} \right) (\alpha_k^*)^{\nu_k}, \quad (19) \end{aligned}$$

gdzie  $m_k = n_k + \nu_k$ .

## 2 Rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa w opisie pól jednomodowych

W tym rozdziale wyznaczymy  $s$ -sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa opisujące ewolucję konkretnych jednomodowych stanów pola: glauberowskich stanów koherentnych, idealnych stanów ścięzionych, przesuniętych stanów fokowskich oraz stanów koherentnych Titulaera-Glaubera.

Zanim wyprowadzimy sparametryzowany rozkład *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  dla stanu koherentnego, kilka słów poświęcimy definicjom tego stanu. Jest to kwestia tym bardziej istotna, że będziemy rozważać uogólnienia stanów koherentnych: (i) dwufotonowe stany koherentne (w §2.1, jak również w §7.2.2); (ii) przesunięte stany fokowskie (w §2.1 oraz w §7.2.3); (iii) stany koherentne Titulaera-Glaubera, które omówimy w §§2.2, 4.1, 4.2.1, 7.2.1 i 7.3; (iv) stan koherentny Yurke'go-Stolera (§4.1), a także (v) stany koherentne w skończenie-wymiarowej przestrzeni stanów, które zdefiniujemy w paragrafie 5.3.



Analitycznie zwarte wyrażenia na  $s$ -parametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  przedstawiliśmy w §2.1 i opublikowaliśmy w [49]. Wzory przybliżone na funkcję  $Q$ , opisujące ewolucję pola w modelu oscylatora anharmonicznego, wyprowadziliśmy metodą punktu siodłowego w §2.2 i opublikowaliśmy w artykule [25].

## 2.1 Stany koherentne, idealne stany ścieśnione oraz przesunięte stany fokowskie

Stany koherentne w nieskończenie-wymiarowej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , zwane glauberskimi stanami koherentnymi <sup>4</sup> definiuje się na kilka sposobów. Według Glaubera [2] można skorzystać z jednej z trzech definicji:

Definicja 1: Stan koherentny  $|\alpha\rangle$  jest stanem własnym operatora anihilacji oscylatora harmonicznego  $\hat{a}$  z wartością własną  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned}\hat{a}|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle, \\ \langle\alpha|\hat{a}^+ &= \langle\alpha|\alpha^*.\end{aligned}\tag{20}$$

Definicja 2: Stan koherentny może być wytworzony ze stanu próżni  $|0\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha, \alpha^*)|0\rangle\tag{21}$$

w wyniku działania operatora przesunięcia

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}),\tag{22}$$

który jest szczególnym przypadkiem operatora (2).

Definicja 3: Stany koherentne są to stany minimalizujące zasadę nieoznaczoności Heisenberga

$$\langle\alpha|(\Delta\hat{X}_1)^2|\alpha\rangle\langle\alpha|(\Delta\hat{X}_2)^2|\alpha\rangle = 1\tag{23}$$

dla uogólnionych operatorów położenia  $\hat{X}_1$  i pędu  $\hat{X}_2$  (vide (203) i (208)),

$$\hat{X}_1 = \hat{a}^+ + \hat{a}, \quad \hat{X}_2 = i(\hat{a}^+ - \hat{a}).\tag{24}$$

---

<sup>4</sup>Schrödinger [35] wprowadził pojęcie stanów koherentnych do mechaniki kwantowej, natomiast Glauber zastosował stany koherentne w optyce kwantowej

Obecnie wiadomo, że def. 3 jest niejednoznaczna, gdyż obejmuje również stany ścięśnione (vide §4.2) <sup>5</sup>. W nieskończenie-wymiarowej przestrzeni Hilberta, definicje 1 i 2 są równoważne. Jednak, w skończenie-wymiarowych przestrzeniach Hilberta *nie można* korzystać z definicji 1 w celu skonstruowania uogólnionych stanów koherentnych [37]– [40]. Definicję 2 wykorzystamy w §5.3 i uzupełnieniu **F** w celu znalezienia reprezentacji fokowskiej stanów koherentnych w skończenie-wymiarowej przestrzeni stanów.

Sparametryzowany rozkład *quasi*-prawdopodobieństwa dla stanu koherentnego  $|\alpha_0\rangle$  można wyznaczyć ze wzorów (2), (13) i (15), prowadzących do:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{coh}^{(s)}(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int \exp(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi + s|\xi|^2/2) \langle 0|D^+(\alpha_0)D(\xi)D(\alpha_0)|0\rangle d^2\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int \exp[(\alpha - \alpha_0)\xi^* - (\alpha^* - \alpha_0^*)\xi + s|\xi|^2/2] \langle 0|D(\xi)|0\rangle d^2\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int \exp[(\alpha - \alpha_0)\xi^* - (\alpha^* - \alpha_0^*)\xi + s|\xi|^2/2 - |\alpha_0|^2/2] d^2\xi \quad (25) \\
&= \frac{2}{1-s} \exp\left\{-\frac{2}{1-s}|\alpha - \alpha_0|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Podobne obliczenia można zastosować w przypadku idealnych stanów ścięśnionych (idealnych stanów ściśniętych) <sup>6</sup> zdefiniowanych przez Caves'a [41] (vide [29, 42, 43]) jako:

$$|\alpha_0, \zeta\rangle = D(\alpha_0)S(\zeta)|0\rangle, \quad (26)$$

gdzie  $S(\zeta)$  jest unitarnym operatorem ścięśniania [44, 45, 41, 46],

$$S(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta^*a^2 - \frac{1}{2}\zeta a^{+2}\right), \quad (27)$$

i  $\zeta$  jest zespolonym parametrem ścięśniania

$$\begin{aligned}
\zeta &= |\zeta|e^{2in}, \\
|\zeta| &\equiv r.
\end{aligned} \quad (28)$$

Definicja idealnych stanów ścięśnionych (26) jest równoważna definicji Yuena [45] tzw. dwufotonowych stanów koherentnych <sup>7</sup>. Bezpośrednie całkowanie prowadzi nas

---

<sup>5</sup>def. 3 określa tzw. stany o minimalnej nieoznaczoności (ang. minimum uncertainty states), jako szczególny przypadek tzw. stanów „inteligentnych” (ang. intelligent states) [36]

<sup>6</sup>ang. ideal squeezed states

<sup>7</sup>ang. two-photon coherent states

do następującego  $s$ -sparametryzowanego rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}_{sq}^{(s)}(\alpha)$  dla idealnego stanu ścieśnionego (przy  $\eta = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{sq}^{(s)}(\alpha) &= \frac{2}{\sqrt{(\mu - s)(\mu^{-1} - s)}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2}{\mu - s} [\text{Im}(\alpha - \alpha_0)]^2 - \frac{2}{\mu^{-1} - s} [\text{Re}(\alpha - \alpha_0)]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$\mu = e^{2r}. \quad (30)$$

Innymi stanami, interesującymi chociażby z punktu widzenia własności fazowych [47, 48, 49], są tzw. przesunięte stany fokowskie <sup>8</sup>  $|\alpha_0, n_0\rangle$ . W myśl definicji de Oliveiry i in. [50], można je otrzymać w wyniku działania operatora przesunięcia  $\hat{D}(\alpha_0)$  na stan fokowski  $|n_0\rangle$  [50]:

$$|\alpha_0, n_0\rangle = \hat{D}(\alpha_0)|n_0\rangle. \quad (31)$$

Oczywiście, w szczególnym przypadku (gdy  $n_0 = 0$ ) stany (31) redukują się do zwykłych glauberowskich stanów koherentnych  $|\alpha_0\rangle \equiv |\alpha_0, 0\rangle$ . W podobny sposób jak wzory (25) i (29), otrzymaliśmy następujący rozkład *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}_{dn}^{(s)}(\alpha)$  dla przesuniętych stanów fokowskich (31):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{dn}^{(s)}(\alpha) &= \frac{2}{1-s} (-1)^{n_0} \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^{n_0} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2}{1-s} |\alpha - \alpha_0|^2 \right\} L_{n_0} \left( \frac{4|\alpha - \alpha_0|^2}{1-s^2} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Powyższe wyniki wykorzystamy w paragrafach 7.2.1–7.2.3 w celu wyznaczenia  $s$ -sparametryzowanych rozkładów fazowych.

---

<sup>8</sup>ang. displaced number states, ros. smieszczionnyje fokowskije sostojanija; termin uogólnione stany fokowskie jest naszym zdaniem mylący, a określenie uogólnione stany koherentne jest pojęciem zbyt szerokim

## 2.2 Stany koherentne Titulaera-Glaubera: ewolucja oscylatora anharmonicznego

Rozważmy model oscylatora anharmonicznego opisany hamiltonianami

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \quad (33a)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} = \hbar\omega\hat{n} \quad (33b)$$

$$\hat{H}_I = \frac{1}{2}\hbar\kappa\hat{a}^{+2}\hat{a}^2 = \frac{1}{2}\hbar\kappa\hat{n}(\hat{n} - 1), \quad (33c)$$

gdzie  $\kappa$  jest stałą anharmoniczności. Stała  $\kappa$  jest liczbą rzeczywistą i można ją powiązać z nieliniową podatnością  $\chi^{(3)}$  ośrodka [51, 52] wtedy, gdy model oscylatora anharmonicznego posłuży do opisu propagacji światła laserowego w nieliniowym ośrodku kerrowskim.

Rozważamy model opisany hamiltonianem  $H_I$  (33c) w porządku normalnym. Często wykorzystuje się inną postać hamiltonianu  $H_I$  – proporcjonalną do kwadratu hamiltonianu swobodnego  $H_0$  (33b) (kwadratu operatora liczby cząstek  $\hat{n}$ ). Różnica między tymi modelami oscylatora anharmonicznego wydaje się trywialna, gdyż poprzez zmianę częstotliwości  $\omega$  oscylatora swobodnego można pokazać ich równoważność. Jednak stosując homodynową detekcję ściężniania, to dodatkowe przesunięcie fazy może być znaczące dla długich czasów ewolucji [53]. Pewne konsekwencje tej różnicy są także widoczne w generacji dyskretnej superpozycji stanów koherentnych. Analizę tego zagadnienia przedstawiliśmy w artykule [54].

Równanie ruchu dla operatora anihilacji  $\hat{a}$  w obrazie Heisenberga przyjmuje następującą postać:

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{a}, \hat{H}] = -i(\omega + \kappa\hat{a}^+\hat{a})\hat{a}. \quad (34)$$

Liczba fotonów  $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$  jest stałą ruchu [komutuje z hamiltonianem (33c)], zatem (34) ma proste rozwiązanie w postaci funkcji wykładniczej

$$\hat{a}(t) = \exp\{-it[\omega + \kappa\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)]\}\hat{a}(0). \quad (35)$$

Relacja (35) jest dokładnym rozwiązaniem operatorowym opisującym czasową ewolucję układu. To rozwiązanie można bezpośrednio wykorzystać w obliczeniach różnych charakterystyk pola, np. wariancji, funkcji korelacji, lub momentów statystycznych wyższego rzędu. Rozwiązanie (35) można rozłożyć na dwa czynniki. Jeden z nich, czynnik  $\exp(-i\omega t)$  opisujący ewolucję swobodną układu, pominiemy w dalszych rozważaniach. Oznacza to, że operator  $\hat{a}(t)$  będzie opisywać jedynie wolnozmienną ewolucję wywołaną nieliniową częścią hamiltonianu (33a).

Rozważmy światło rozchodzące się w nieliniowym ośrodku (zamiast pola we wnęce) o współczynniku załamania  $\eta$  i zaniedbywalnie małej dyspersji. Wówczas czasową ewolucję  $t$  można zastąpić przez  $(-\eta z/c)$ , gdzie  $z$  jest drogą przebytą przez fotony w ośrodku. Rozwiązanie (35) przyjmie wówczas postać

$$\hat{a}(\tau) = \exp\{i\tau\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)\}\hat{a}(0), \quad (36)$$

gdzie

$$\tau = -\frac{\eta}{c}\kappa z. \quad (37)$$

W obrazie Schrödingera należy określić ewolucję wektora stanu pola w ośrodku kerrowskim. Korzystając z operatora ewolucji [55]

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(\frac{i}{2}\tau\hat{a}^{+2}\hat{a}^2\right) = \exp\left(\frac{i}{2}\tau\hat{n}(\hat{n}-1)\right), \quad (38)$$

stan pola opuszczającego ośrodek jest dany przez

$$|\psi(\tau)\rangle = \hat{U}(\tau)|\psi_0\rangle. \quad (39)$$

Jeśli wiązka padająca na ośrodek kerrowski jest w stanie koherentnym, to stan pola na wyjściu, zgodnie z (39), jest równy

$$|\psi(\tau)\rangle = |\alpha_0, \tau\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(i\frac{\tau}{2}n(n-1)\right)|n\rangle. \quad (40)$$

Z uwagi na występowanie dodatkowego członu fazowego  $\frac{\tau}{2}n(n-1)$ , stan (40) jest uogólnionym stanem koherentnym, który formalnie jest zdefiniowany następująco:

$$|\psi(\tau)\rangle \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} \exp(i\theta_n)|n\rangle, \quad (41)$$

gdzie  $\theta_n$  jest dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Stan (41) został wprowadzony przez Titulaera i Glaubera [28], a następnie analizowany przez Białynicką-Birulę [56] i Stolera [57]. W niniejszej dysertacji stan (41) będziemy nazywać stanem koherentnym Titulaera-Glaubera.

Jeśli są spełnione warunki określone przez Białynicką-Birulę [56], to stany koherentne Titulaera-Glaubera stają się superpozycją glauberowskich stanów koherentnych [58, 59]. To niezwykle interesujące zjawisko omówimy w paragrafach 4.1 i 7.3 (zob. także nasze artykuły [54, 60]).

Sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa są dogodnymi reprezentacjami stanu pola (39). Korzystając z definicji (17), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \tau) &= \exp\left(-|\alpha_0|^2 - \frac{2}{1-s}|\alpha|^2\right) \sum_{m,n} \frac{|\alpha|^{m-n} |\alpha_0|^{n+m}}{m!} \\ &\times \left(\frac{2}{1-s}\right)^{m-n+1} \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n L_n^{m-n} \left(\frac{4|\alpha|^2}{1-s^2}\right) \\ &\times \exp\left\{i[(m-n)(\theta_0 - \theta) + \frac{\tau}{2}(m(m-1) - n(n-1))]\right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Rozkład  $\mathcal{W}^{(-1)}(\alpha, \tau)$  (funkcję  $Q$ ) można zapisać w prostszej postaci

$$Q(\alpha, \tau) = \exp(-|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2) \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \alpha_0)^n}{n!} \exp\left(i\frac{\tau}{2}n(n-1)\right) \right|^2, \quad (43)$$

która bezpośrednio wynika z definicji funkcji (8a).

Korzystając z własności symetrii wielomianów Laguerre'a,

$$\frac{(-1)^m}{n! x^m} L_m^{n-m}(x) = \frac{(-1)^n}{m! x^n} L_n^{m-n}(x), \quad (44)$$

znajdujemy rozkład *quasi*-prawdopodobieństwa (42) w postaci symetrycznej

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \tau) &= \frac{2}{1-s} \exp\left\{-\frac{2}{1-s}(|\alpha_0|^2 + |\alpha|^2)\right\} \left\{2 \exp\left(\frac{1+s}{1-s}|\alpha_0|^2\right)\right. \\ &\times \sum_{m>n} \frac{|\alpha|^{m-n} |\alpha_0|^{n+m}}{m!} \left(\frac{2}{1-s}\right)^{m-n} \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n L_n^{m-n} \left(\frac{4|\alpha|^2}{1-s^2}\right) \\ &\times \cos\left\{(m-n)(\theta_0 - \theta) + \frac{\tau}{2}[m(m-1) - n(n-1)]\right\} \\ &\left. + J_0\left(i\frac{4}{1-s}|\alpha| |\alpha_0|\right)\right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

gdzie  $J_0(x)$  jest zwyczajną funkcją Bessela pierwszego rodzaju i zerowego rzędu. W szczególnym wypadku, gdy  $s = -1$ , wzór (45) upraszcza się do postaci

$$Q(\alpha, \tau) = \exp(-|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2) \left\{ 2 \sum_{n>m} \frac{(|\alpha_0||\alpha|)^{n+m}}{n!m!} \cos \{ (m-n)(\theta_0 - \theta) \right. \\ \left. + \frac{\tau}{2} [ m(m-1) - n(n-1) ] \} + J_0(2i|\alpha| |\alpha_0|) \right\}. \quad (46)$$

W chwili  $\tau = 0$  otrzymujemy, w myśl naszego założenia,  $s$ -sparametryzowany rozkład gaussowski:

$$\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \tau) = \frac{2}{1-s} \exp \left\{ -\frac{2}{1-s} |\alpha - \alpha_0|^2 \right\}. \quad (47)$$

opisujący stan koherentny  $|\alpha_0\rangle$ .

W miarę ewolucji oscylatora stan pola staje się ściśniony i gaussowski kształt rozkładów (47) ulega deformacji. Przekroje rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \tau)$  są często dogodnymi reprezentacjami ściśniania. W szczególności przekroje funkcji  $Q$  w modelu oscylatora anharmonicznego (33c) były analizowane w kontekście zjawiska ściśniania m.in. przez Milburna [61], Kitagawę i Yamamoto [55] oraz Tanasia, Miranowicza i Kielicha [25]. To zagadnienie omówimy w §4.2.1. Z drugiej strony,  $s$ -sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \tau)$  ( $s \neq 1$ ), a także ich funkcje marginalne ( $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe)  $P^{(s)}(\theta, \tau)$ , są dobrymi reprezentacjami graficznymi dyskretnych superpozycji stanów koherentnych. Analizę tego zjawiska, popartą licznymi przykładami, przedstawimy w paragrafach 4.1 [dla  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \tau)$ ] i 7.3 [dla  $P^{(s)}(\theta, \tau)$ ].

Wzory (42) lub (45) umożliwiają bezpośrednią analizę numeryczną  $s$ -sparametryzowanych ( $s \neq 1$ ) rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa jedynie dla małych wartości  $|\alpha_0|^2$ . Jednak w przypadku, gdy  $|\alpha_0|^2 \gg 1$  można zastosować metodę punktu siodłowego (metodę największego spadku [62]) w celu wysumowania wyrażeń (42), (43), (45) i (46). Ograniczymy naszą uwagę do funkcji  $Q$  ( $s = -1$ ). Problem sprowadza się wówczas do wyznaczenia sumy

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\alpha_0|^2) \right] \frac{(\alpha^* \alpha_0)^n}{n!} \exp \left[ \frac{1}{2} i \tau n(n-1) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[ -\frac{1}{2}(|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|\alpha| |\alpha_0|) \frac{(|\alpha| |\alpha_0|)^n}{n!} \\
&\quad \times \exp \left[ in(\theta_0 - \theta) + \frac{1}{2}i\tau n(n-1) \right],
\end{aligned} \tag{48}$$

gdzie oznaczyliśmy  $\alpha_0 = |\alpha_0| \exp(i\theta_0)$  i  $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$ . Ze wzoru (48) wynika, że musimy zsumować wyrażenie:

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \exp[in(\theta_0 - \theta) + \frac{1}{2}i\tau n(n-1)] \tag{49}$$

z poissonowskim czynnikiem wagowym

$$p_n = e^{-N} N^n / n!, \tag{50}$$

gdzie  $N = |\alpha| |\alpha_0|$ . Przy założeniu, że  $N \gg 1$ , można stosować metodę punktu siodłowego. Tę metodę wykorzystano w obliczeniach zaników i odrodzeń<sup>9</sup> oscylacji w modelu Jaynesa-Cummingsa [63]. Podobnie postąpimy w celu zsumowania (49). Oczywiście, nasze założenie ( $|\alpha| |\alpha_0| \gg 1$ ) oznacza, że wynik otrzymany w ten sposób może być niewłaściwy dla małych wartości  $|\alpha|$ . Jednak występowanie funkcji wykładniczych w (48) sprawia, że QPD jest istotnie różna od zera jedynie dla  $|\alpha|$  niewiele różniącego się od  $|\alpha_0|$ . Zatem warunek  $|\alpha_0| \gg 1$  oznacza, że  $|\alpha| \gg 1$ . Twierdzimy, że nasze wyniki są słuszne przy założeniu, że jedynie liczba fotonów wiązki padającej na ośrodek jest duża ( $|\alpha_0| \gg 1$ ). Sumę (49) możemy zapisać jako całkę

$$S \approx \left( \frac{2N}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp[Nf(y)] dy, \tag{51}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie  $y^2 = n/N$ , a funkcję  $f(y)$  określiliśmy wzorem

$$f(y) = y^2(1 - 2 \ln y) - 1 + iy^2(\theta_0 - \theta) + \frac{1}{2}i\tau y^2(y^2 N - 1). \tag{52}$$

Punkty siodłowe funkcji  $f(y)$  określone są warunkiem

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = 0, \tag{53}$$

---

<sup>9</sup>ang. collapses and revivals, ros. zatuchania i wozobnowlenia



dzięki któremu otrzymujemy następujące równanie:

$$-4y \ln y + 2iy(\theta_0 - \theta) + 2i\tau N y^3 - i\tau y = 0. \quad (54)$$

Jeśli wprowadzić oznaczenie

$$y = \rho \exp(i\vartheta/2), \quad (55)$$

to (54) można rozdzielić na równania

$$\ln \rho + \frac{1}{2}\tau N \rho^2 \sin \vartheta = 0 \quad (56a)$$

$$\vartheta - (\theta_0 - \theta) + \frac{1}{2}\tau - \tau N \rho^2 \cos \vartheta = 0. \quad (56b)$$

Stąd możemy wyznaczyć następującą dokładną relację

$$\rho = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \vartheta - (\theta_0 - \theta) + \frac{1}{2}\tau \right] \tan \vartheta \right\}. \quad (57)$$

Jeśli (57) ponownie podstawimy do relacji (56a), to otrzymamy równanie na  $\vartheta$ :

$$\vartheta' \tan \vartheta \exp(\vartheta' \tan \vartheta) = \tau |\alpha| |\alpha_0| \sin \tau, \quad (58)$$

gdzie

$$\vartheta' = \vartheta - (\theta_0 - \theta) + \frac{1}{2}\tau. \quad (59)$$

Równanie (58) może być rozwiązane numerycznie dla konkretnych wartości parametrów. Po podstawieniu  $\vartheta$  (wyznaczonego z (58)) do (57) otrzymujemy punkty siodłowe (55). Interesują nas jedynie rozwiązania dla małych wartości  $\tau$ , zatem pominiemy wszystkie te punkty siodłowe, które mogą się pojawić dla dużych wartości  $\tau$ . Jeśli  $\tau$  jest bardzo małe oraz  $|\alpha_0|$  i  $|\alpha|$  duże, to aby rozwiązać (58) wymagana jest duża precyzja obliczeń numerycznych. Na marginesie podkreślamy, że położenie punktów siodłowych zależy od konkretnych wartości  $|\alpha|$  i  $\theta$ , dla których chcemy wyznaczyć funkcję  $Q$ .

Gdy wyznaczymy punkt siodłowy, to funkcję  $Q$  możemy wówczas obliczyć z relacji

$$Q(\alpha, \tau) = 4 \exp[-(|\alpha| - |\alpha_0|)^2 + 2|\alpha||\alpha_0| \operatorname{Re} f(y)] |f^{(2)}(y)|^{-1}, \quad (60)$$

gdzie funkcja  $f(y)$  i jej druga pochodna  $f^{(2)}(y)$  są określane w punkcie siodłowym. Na mocy (60) i przy założeniu dużej liczby fotonów otrzymujemy stosunkowo prosty wzór na funkcję  $Q$  :

$$Q(\alpha, \tau) = D^{-1} \exp \left\{ -|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2 + 2|\alpha| |\alpha_0| \cos \vartheta (1 + \vartheta' \tan \vartheta) \exp(-\vartheta' \tan \vartheta) \right\}, \quad (61)$$

gdzie

$$D = [(1 + \vartheta' \tan \vartheta)^2 + (\vartheta')^2]^{1/2}. \quad (62)$$

Gdy  $\tau = 0$ , to z (58) otrzymujemy  $\vartheta = \theta_0 - \theta$  i wzór (61) upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} Q(\alpha, 0) &= \exp[-|\alpha|^2 - |\alpha_0|^2 + 2|\alpha| |\alpha_0| \cos(\theta_0 - \theta)] \\ &= \exp(-|\alpha - \alpha_0|^2). \end{aligned} \quad (63)$$

Oczywiście jest to początkowy rozkład gaussowski określony wzorem (47), gdy  $s = -1$ .

Nasz wzór (61) umożliwia numeryczne wyznaczenie funkcji  $Q$  w przypadku  $\tau \ll 1$  i  $|\alpha_0| \gg 1$ . Bezpośrednie wysumowanie wzoru (46) (lub jemu równoważnych) nie jest wówczas możliwe. Na rys. 10 przedstawiliśmy przekroje funkcji  $Q$  wyznaczone z wzoru (61), korzystając z (58) i (59). Parametry  $\tau$  i  $|\alpha_0|$  dobraliśmy w ten sposób, aby  $x = |\alpha_0|^2 \tau \sim 1$ . Interpretację przekrojów funkcji  $Q$  na rys. 10 przedstawimy w §4.2.1 w kontekście zjawiska ścieśniania światła. Tamże uzasadnimy wybór wartości  $x = 0.59$  i  $x = 3.29$ .

### 3 Rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa w opisie pól dwu- i trójmodowych: rozpraszanie ramanowskie

Podamy analizę dwu- i trójmodowych sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa i sparametryzowanych funkcji charakterystycznych na przykładzie rozpraszania ramanowskiego (kombinacyjnego rozpraszania światła). Wyniki badań nad zjawiskiem ramanowskim przedstawiliśmy w [64]. Rozpraszanie światła analizowaliśmy także w pracach [65, 66, 67].

Stworzono wiele teorii rozpraszania ramanowskiego zarówno w modelach półklasycznych i kwantowych dla fal stojących i biegnących. W rozprawie omówimy kwantowo-statystyczną teorię rozpraszania ramanowskiego na kryształach z uwzględnieniem jedynie trzech modów promieniowania: laserowego, antystokesowskiego i stokesowskiego. Taki formalizm najlepiej nadaje się do opisu rozpraszania we wnęce rezonansowej. Niemniej pewne wyniki otrzymane w ramach takiego modelu dla fal stojących mogą być słuszne w modelach przestrzennej propagacji pól ramanowskich. W ostatnich latach stosowano różne metody w każdej z powyższych teorii. Podstawą klasyfikacji tych metod mogą być równania ruchu opisujące ewolucję pól ramanowskich. Stosowano metody oparte na równaniu Schödingera, r. Heisenberga (r. Heisenberga-Langevina), równaniu fundamentalnym (uogólnionym r. Fokkera-Plancka), r. Maxwella-Heisenberga (r. Maxwella-Blocha), równaniu kinetycznym i innych. Oczywiście przedstawiona klasyfikacja jest uproszczona i niejednoznaczna [64].

Podstawy teoretyczne rozpraszania ramanowskiego oraz znaczące eksperymenty zostały omówione w licznych monografiach i artykułach przeglądowych. Wymienimy tylko niektóre z nich: Bloembergena [68], Kielicha [69, 70, 71], Shena [72], Raymera i Walmслея [73], Mostowskiego i Raymera [74], Peřiny [24] i innych ([64], [75]– [85]).

Ograniczamy naszą uwagę do formalizmów równania fundamentalnego i pochodnych klasycznych równań ruchu. Takie ujęcie rozpraszania ramanowskiego zostało zaproponowane przez Shena [86], Wallsa [87] oraz McNeila i Wallsa [88], a następnie ana-

lizowane przez różnych autorów m. in. przez: Simaana [89], Schenzlego i Branda [90], Peřinę [91, 92, 24], Germeya i in. [93], Guptę i Dasha [94], Bogolubova i in. [95], Grygiela [96], Kárską i Peřinę [97] oraz Miranowicza i Kielicha [64]. W tym rozdziale przedstawimy kwantowo-statystyczną teorię rozpraszania ramanowskiego w modelu stojącej fali wykorzystując formalizm dwu- i trójmodowych  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa (w paragrafie 3.1) oraz formalizm macierzy gęstości w reprezentacji fokowskiej (w paragrafie 3.2).

Rozważmy rozpraszanie ramanowskie wychodząc z całkowicie kwantowego hamiltonianu opisującego zjawisko fenomenologicznie (tj. z pominięciem szczegółów mechanizmu rozpraszania). Opiszemy trzy jednomodowe pola promieniowania: padającą wiązkę laserową o częstości  $\omega_L$ , pole stokesowskie o częstości  $\omega_S$  i pole antystokesowskie o częstości  $\omega_A$ . Pola te oddziałują ze sobą poprzez układ nieskończonej liczby optycznych modów wibracyjnych (fononów optycznych) o częstościach  $\omega_{Vj}$ . Hamiltonian efektywny zaproponowany przez Wallsa [87] (vide [91, 92, 98]) ma postać:

$$\hat{H}_T = \hat{H}_0 + \hat{H}_S + \hat{H}_A, \quad (64)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_L \hat{a}_L^+ \hat{a}_L + \hbar\omega_S \hat{a}_S^+ \hat{a}_S + \hbar\omega_A \hat{a}_A^+ \hat{a}_A + \hbar \sum_j \omega_{Vj} \hat{a}_{Vj}^+ \hat{a}_{Vj}, \quad (65)$$

$$\hat{H}_S = \hbar \sum_j \lambda_{Sj} \hat{a}_L \hat{a}_S^+ \hat{a}_{Vj}^+ + \text{h.c.}, \quad (66a)$$

$$\hat{H}_A = \hbar \sum_j \lambda_{Aj}^* \hat{a}_L \hat{a}_A^+ \hat{a}_{Vj} + \text{h.c.}, \quad (66b)$$

gdzie  $\hat{H}_S$  ( $\hat{H}_A$ ) jest trójliniowym hamiltonianem oddziaływania dla pola stokesowskiego (antystokesowskiego), tj. określającym rozpraszanie ramanowskie typu stokesowskiego (antystokesowskiego). Operatory anihilacji dla pól: laserowego, stokesowskiego, antystokesowskiego i fononowych są oznaczone odpowiednio przez  $\hat{a}_L$ ,  $\hat{a}_S$ ,  $\hat{a}_A$ ,  $\hat{a}_{Vj}$ . Współczynnik sprzężenia  $\lambda_{Sj}$  ( $\lambda_{Aj}$ ) opisuje siłę sprzężenia między modem stokesowskim (antystokesowskim), a modem fononowym o częstości  $\omega_{Vj}$ . Z uwagi na skończone rozmiary ośrodka zasada zachowania pędu nie jest ściśle spełniona dla pojedynczych aktów rozpraszania, jeśli pominąć ruch ośrodka jako całości [99, 100, 101]. Stałe sprzężenia są

proporcjonalne do tego niedopasowania wektorów falowych [87, 102]:

$$\lambda_{Sj} \sim \int \exp \left[ -i \left( \vec{k}_L - \vec{k}_S - \vec{k}_{Vj} \right) \cdot \vec{r} \right] d^3r, \quad (67a)$$

$$\lambda_{Aj} \sim \int \exp \left[ -i \left( \vec{k}_L - \vec{k}_A + \vec{k}_{Vj} \right) \cdot \vec{r} \right] d^3r. \quad (67b)$$

Pola promieniowania są sprzężone z fononami optycznymi o wektorach falowych  $\vec{k}_{Vj}$  nie spełniających zasady zachowania pędu ( $\vec{k}_{Vj} \neq \vec{k}_L - \vec{k}_S$  lub  $\vec{k}_{Vj} \neq \vec{k}_A - \vec{k}_L$ ), o rząd wielkości odwrotnie proporcjonalny do wymiarów ośrodka. Stąd też w hamiltonianach oddziaływania (66a–b) występują sumy po wszystkich optycznych modach wibracyjnych, które mogą brać udział w rozpraszaniu. Oznacza to, że sprzężenie między polami promieniowania (a w szczególności między stokesowskim i antystokesowskim) poprzez dużą liczbę fononów będzie potraktowane w sposób stochastyczny [87]. Wydaje się, że to ujęcie daje pełniejszy obraz rozpraszania, niż założenie sprzężenia poprzez jeden mod fononowy — taki model analizowano w pracach [103]–[106] i innych. W modelu zastosowano przybliżenie wirującej fali<sup>10</sup>. Przyjęto również przybliżenie długofalowe<sup>11</sup> co oznacza, że pominięto dyspersję ośrodka oraz założono jego ciągłość. W modelu ograniczono się także do dipolowych przejść elektronowych. Ponadto założono liniową polaryzację (w tym samym kierunku) pól promieniowania i fononów. Kilka innych założeń przedstawiliśmy w uzupełnieniu **A**. Pełniejszą analizę zalet i ograniczeń modelu rozpraszania ramanowskiego opisywanego hamiltonianem (64) przedstawiliśmy w artykule [64] (zob. także [87, 99, 101]).

Zbadamy jedynie statystyczne własności pól promieniowania (tj. pompującego i rozproszonych), które potraktujemy jako układ. Pominiemy nieistotny dla nas opis niekończonego zbioru fononów – termostatu<sup>12</sup>. Procedura prowadząca do równania fundamentalnego<sup>13</sup> (równanie master) jest często stosowana w optyce kwantowej. Do-

---

<sup>10</sup>ang. rotating wave approximation

<sup>11</sup>ang. long wavelength approximation

<sup>12</sup>tłumaczenie ad sensum ang. reservoir, heat bath; te pojęcia są ogólniejsze od terminu termostat (ang. thermostat), jednak w omawianym modelu dodatkowo zakładamy, że zbiór fononów jest w równowadze termodynamicznej

<sup>13</sup>ang. master equation, stąd też oznaczenie ME stosowane w literaturze anglosaskiej

skonałe omówienie metod wyprowadzania i rozwiązywania równania fundamentalnego można znaleźć w pracach [19, 21, 22, 24, 104].

Zmienne opisujące układ i termostat są wzajemnie niezależne, co oznacza, że

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] = \delta_{ij} \quad \text{for } i, j = L, S, A, V_1, V_2, \dots \quad (68)$$

Zatem możemy w tradycyjny sposób wyliczyć ślad pełnej macierzy gęstości po zmiennych termostatu, co prowadzi do zredukowanej macierzy gęstości  $\hat{\rho}(t)$ . Oczywiście tracimy opis modów fononowych. Zaproponowano inne modele rozpraszania ramanowskiego (np. [99, 93, 24]), w których fonony optyczne (oprócz pól promieniowania) są uwzględnione w układzie. Natomiast inne wzbudzenia kryształu, takie jak np. fonony akustyczne, tworzą termostat.

Pola promieniowania są słabo sprzężone z termostatem. Część energii pól przechodzi do termostatu. Ale i fluktuacje w termostacie wstecznie sprzęgają się z układem, wprowadzając szum do pól promieniowania. Zastosujemy przybliżenie Markova, jako warunek zapewniający, że energia przechodząca z układu do termostatu nie powróci do niego [19, 21].

W pracy [64] (vide uzupełnienie **A**) wyprowadziliśmy równanie fundamentalne dla modelu rozpraszania ramanowskiego w opisie całkowicie kwantowym, tj. m.in. bez zastosowania przybliżenia parametrycznego. Równanie to ma następującą postać dla zredukowanej macierzy gęstości  $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{a}_L, \hat{a}_S, \hat{a}_A, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = & \frac{1}{2} \gamma_S ([\hat{a}_L \hat{a}_S^+, \hat{\rho} \hat{a}_L^+ \hat{a}_S] + \text{h.c.}) \\ & + \frac{1}{2} \gamma_A ([\hat{a}_L^+ \hat{a}_A, \hat{\rho} \hat{a}_L \hat{a}_A^+] + \text{h.c.}) \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{SA} e^{-2i\Delta\Omega\Delta t} ([\hat{a}_L \hat{a}_S^+, \hat{\rho} \hat{a}_L \hat{a}_A^+] + [\hat{a}_L \hat{a}_S^+ \hat{\rho}, \hat{a}_L \hat{a}_A^+]) \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{AS} e^{2i\Delta\Omega\Delta t} ([\hat{a}_L^+ \hat{a}_A, \hat{\rho} \hat{a}_L^+ \hat{a}_S] + [\hat{a}_L^+ \hat{a}_A \hat{\rho}, \hat{a}_L^+ \hat{a}_S]) \\ & - \langle \hat{n}_V \rangle \left\{ \frac{1}{2} \gamma_S ([\hat{a}_L^+ \hat{a}_S, [\hat{a}_L \hat{a}_S^+, \hat{\rho}]] + \text{h.c.}) \right. \\ & + \frac{1}{2} \gamma_A ([\hat{a}_L \hat{a}_A^+, [\hat{a}_L^+ \hat{a}_A, \hat{\rho}]] + \text{h.c.}) \\ & + \gamma_{SA} e^{-2i\Delta\Omega\Delta t} [\hat{a}_L^+ \hat{a}_S, [\hat{a}_L^+ \hat{a}_A, \hat{\rho}]] \\ & \left. + \gamma_{AS} e^{2i\Delta\Omega\Delta t} [\hat{a}_L \hat{a}_A^+, [\hat{a}_L \hat{a}_S^+, \hat{\rho}]] \right\}, \end{aligned} \quad (69)$$

gdzie h.c. oznacza człon hermitowsko sprzężony <sup>14</sup> do poprzedniego;  $\gamma_S$  jest stałą wzmocnienia dla pola stokesowskiego;  $\gamma_A$  jest stałą tłumienia dla pola antystokesowskiego;  $\gamma_{SA}$  i  $\gamma_{AS}$  są stałymi tłumienia wzajemnego dla dwóch rozproszonych pól

$$\gamma_k = 2\pi g(\Omega) |\lambda_k(\Omega)|^2 \quad (k = S, A), \quad (70a)$$

$$\gamma_{SA} = \gamma_{AS}^* = 2\pi g(\Omega) \lambda_S(\Omega) \lambda_A^*(\Omega). \quad (70b)$$

Niedopasowanie (odstrojenie) częstości <sup>15</sup>  $\Delta\Omega$  i częstość  $\Omega$  zdefiniowano następująco:

$$\Delta\Omega = \frac{\Omega_S - \Omega_A}{2} = \omega_L - \frac{\omega_A + \omega_S}{2}, \quad (71)$$

$$\Omega = \frac{\Omega_S + \Omega_A}{2} = \frac{\omega_A - \omega_S}{2}, \quad (72)$$

gdzie

$$\Omega_{S,A} = |\omega_L - \omega_{S,A}|. \quad (73)$$

Z reguły niedopasowanie częstości  $\Delta\Omega$  jest równe zero, choć w niektórych przypadkach przyjmujemy, że nieznacznie różni się od zera. Gęstość optycznych modów fononowych (widmo termostatu) o częstości  $\Omega$  oznaczono przez  $g(\Omega)$ . Średnia liczba fononów w jednym modzie jest określona rozkładem Bosego-Einsteina

$$\langle \hat{n}(\omega_{Vj}) \rangle = \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega_{Vj}}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (74)$$

gdzie  $k_B$  jest stałą Boltzmann'a a  $T$  – temperaturą termostatu. Oczywiście, gdy temperatura kryształu maleje do zera, to średnia liczba fononów  $\langle \hat{n}(\omega_V) \rangle$  również zmierza do zera. W §3.1.2 przeanalizujemy rozpraszanie ramanowskie w przybliżeniu parametrycznym, gdy termostat znajduje się w dowolnej temperaturze ( $\langle \hat{n}(\omega_V) \rangle \neq 0$ ). Natomiast w paragrafie 3.2 omówimy rozpraszanie ramanowskie bez przybliżenia parametrycznego, ale w temperaturze bliskiej zera absolutnego ( $\langle \hat{n}(\omega_V) \rangle \approx 0$ ).

---

<sup>14</sup>od ang. Hermitean conjugate

<sup>15</sup>ang. frequency mismatch, ros. rasstrojka czastot

Równanie fundamentalne ( 69) wyprowadziliśmy w pracy [64]. W szczególnym przypadku, po zastosowaniu przybliżenia parametrycznego, ( 69) upraszcza się do równań otrzymanych przez Wallsa [87] i Peřinę [91]. Wzór ( 69) redukuje się także do równania McNeila i Wallsa w opisie rozpraszania ramanowskiego typu stokesowskiego, ale bez konieczności stosowania przybliżenia parametrycznego [88].

Równanie fundamentalne może być rozwiązane różnymi metodami przedstawionymi w wielu podręcznikach ([19]– [24], [108]). Takie równanie jest zwykle przekształcane do postaci klasycznego równania różniczkowego. W niniejszej rozprawie przedstawimy dwa podejścia. (i) przekształcenie do równania Fokkera-Plancka dla sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa, korzystając z metody stanów koherentnych oraz (ii) alternatywną metodę równania fundamentalnego ( 69) w reprezentacji fokowskiej. Równania Fokkera-Plancka rozwiążemy metodą stosowaną w przypadku procesów Ornsteina-Uhlenbecka [109, 20]. Natomiast równanie fundamentalne w reprezentacji fokowskiej rozwiążemy metodą transformacji Laplace’a [88, 89, 110].

W następnych paragrafach zanalizujemy trzy przypadki. Po pierwsze, pokrótce opisujemy sprzężenie trzech kwantowych pól promieniowania: laserowego, stokesowskiego i antystokesowskiego. Problem znacznie się upraszcza jeśli założyć, że rozkłady mają bardzo małą szerokość połówkową. Po drugie, zastosujemy przybliżenie parametryczne, które oznacza, że wiązkę pompującą potraktujemy klasycznie. Wówczas uwzględnimy jedynie sprzężenie między wiązkami stokesowską i antystokesowską. Po trzecie, oddzielnie rozważymy albo rozpraszanie ramanowskie typu stokesowskiego albo typu antystokesowskiego. Nie pominiemy kwantowej ewolucji pola pompującego. Na przykładzie tych modeli ukażemy rolę i własności rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa.

Walls [87] pierwszy wyprowadził równanie Fokkera-Plancka dla rozpraszania ramanowskiego. Peřina z współpracownikami ([24] i prace tam cytowane) znalazł analityczne rozwiązanie tego równania dla funkcji  $Q$  i  $P$  oraz zbadał zagadnienie istnienia rozwiązań przy pewnych warunkach początkowych. Słabą stroną tego podejścia jest stosowanie przybliżenia parametrycznego, co efektywnie linearyzuje zagadnienie. Ponadto, pojawia się problem istnienia rozwiązań równania Fokkera-Plancka. Macierz



dyfuzji nie jest wszędzie dodatnio określona, stąd też nie zawsze istnieją rozwiązania, a równanie ruchu nie jest „prawdziwym” równaniem Fokkera-Plancka. W rozprawie podamy rozwiązanie dla s-sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa i omówimy zagadnienie ich istnienia.

Metoda równań ruchu w reprezentacji fokowskiej (tj. w bazie stanów Focka) była stosowana do opisu różnych wielofotonowych procesów ramanowskich ([88, 89], [110]–[118]).

Równanie fundamentalne w reprezentacji fokowskiej zastosowane do opisu pola stokowskiego może być rozwiązane metodą transformacji Laplace’a. McNeil i Walls [88], Simaan [89] i inni znaleźli rozwiązania dla elementów diagonalnych. To jest słaba strona tych sformułowań [24]. Statystyka liczby fotonów (np. subpoissonowska i superpoissonowska), jak również efekty grupowania i rozgrupowania fotonów, mogą być w pełni opisane przez elementy diagonalne macierzy gęstości  $\hat{\rho}$ . Jednak, aby opisać własności fazowe pól (w szczególności ścieśnianie światła) należy znać elementy niediagonalne  $\hat{\rho}$ . W rozprawie przedstawimy ścisłe, analityczne rozwiązanie równania fundamentalnego opisującego rozpraszanie ramanowskie dla wszystkich elementów  $\langle n, m | \hat{\rho} | n', m' \rangle$  macierzy gęstości  $\hat{\rho}$ .

### 3.1 Równanie Fokkera-Plancka

Równanie fundamentalne jest operatorowym równaniem ruchu i dlatego tylko dla wąskiej klasy modeli fizycznych daje się rozwiązać bezpośrednio. Jako przykład podajmy model Knighta [119, 120] (także [121, 122] i artykuły tamże cytowane) opisujący sprzężenia typu ramanowskiego. Zwykle kwantowe równanie jest przekształcane do postaci klasycznego równania różniczkowego. Wówczas mogą być stosowane klasyczne metody analizy matematycznej. W tym paragrafie przedstawimy jedną z najbardziej popularnych metod – transformację do uogólnionego równania Fokkera-Plancka (FPE<sup>16</sup>), lub równoważnie, transformację do równań ruchu dla funkcji charakterystycznych. Ta metoda została dokładnie omówiona w licznych podręcznikach ([19]–[22], [24]). Walls [87]

---

<sup>16</sup>od ang. Fokker-Planck equation, oznaczenie stosowane w literaturze anglosaskiej

jako jeden z pierwszych (obok Shena [86]) zastosował metodę równania Fokkera-Plancka do opisu rozpraszania ramanowskiego. Niestety główny wynik pracy [87] – rozwiązanie równania FPE dla pól: stokesowskiego i antystokesowskiego, nie jest słuszny. Poprawne rozwiązanie przedstawił Peřina [91, 92]. Mimo, że później otrzymano ogólniejsze rozwiązania (vide [24] i prace tamże cytowane), to jednak analityczne rozwiązanie równania Fokkera-Plancka dla modelu rozpraszania ramanowskiego znaleziono jedynie w przybliżeniu parametrycznym, tj. z pominięciem kwantowej ewolucji pola pompującego. Oznacza to, że rozpraszanie ramanowskie w kryształach jest opisywane jako proces wzmacniania parametrycznego (pole stokesowskie) i parametrycznego konwertera częstotliwości (pole antystokesowskie). Zastosowanie przybliżenia parametrycznego wydaje się, że jest najsłabszą stroną metody FPE w opisie zjawiska ramanowskiego. Poza tym pojawia się problem istnienia rozwiązań FPE. Macierz dyfuzji FPE dla sparametryzowanego rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa nie jest dodatkowo określona (przy określonych warunkach początkowych oraz pewnym  $s$ ). Dlatego takie FPE nie powinny być interpretowane tak samo jak „prawdziwe” FPE, tj. równanie opisujące ruchy Browna pod wpływem odpowiedniej siły [123]. Stosowane jest wówczas określenie: uogólnione równanie Fokkera-Plancka <sup>17</sup>. Czasem można się spotkać z opinią, że takie równania są w pewnym sensie niefizyczne [124].

Metoda FPE polega na dokonaniu  $s$ -uporządkowania operatorów w równaniu fundamentalnym (69), a następnie na wykorzystaniu kwantowo-klasycznej zasady odpowiedniości dla stanów koherentnych. Reguły przekształcenia równania fundamentalnego do postaci FPE dla  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \alpha^*, \bar{A})$  są dobrze znane [14, 125]. Zapiszmy je w zwartej postaci:

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{A}\hat{a} \\ \hat{a}\hat{A} \end{array} \right\} \mapsto \left( \alpha - \frac{s \pm 1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \alpha^*, \bar{A}), \quad (75a)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{a}^+\hat{A} \\ \hat{A}\hat{a}^+ \end{array} \right\} \mapsto \left( \alpha^* - \frac{s \pm 1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \alpha^*, \bar{A}), \quad (75b)$$

gdzie  $\hat{A}$  jest dowolnym operatorem; w szczególności  $\hat{A}$  może być macierzą gęstości  $\hat{\rho}$ ;  $\bar{A}$

<sup>17</sup>ang. generalized Fokker-Planck equation, pseudo-Fokker-Planck equation

jest klasyczną funkcją związaną z operatorem  $\hat{A}$ ; parametr  $s$  przyjmuje dowolne wartości z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ . Reguły ( 75a-b) mogą być stosowane wielokrotnie, gdy  $\hat{A}$  jest funkcją innych operatorów. Przytoczmy również reguły przekształcenia równania fundamentalnego ( 69) do równania ruchu dla  $s$ -sparametryzowanej funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta, \beta^*, \bar{A})$  (np. [14]):

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{A}\hat{a} \\ \hat{a}\hat{A} \end{array} \right\} \mapsto \left( -\frac{\partial}{\partial\beta^*} + \frac{s \pm 1}{2}\beta \right) \mathcal{C}^{(s)}(\beta, \beta^*, \bar{A}), \quad (76a)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{a}^+\hat{A} \\ \hat{A}\hat{a}^+ \end{array} \right\} \mapsto \left( \frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{s \pm 1}{2}\beta^* \right) \mathcal{C}^{(s)}(\beta, \beta^*, \bar{A}). \quad (76b)$$

W §3.1.1 wyprowadzimy równanie Fokkera-Plancka w opisie całkowicie kwantowym. Przybliżone rozwiązanie analityczne tego równania podamy w uzupełnieniu **B**. W §3.1.2 i §3.1.3 przedstawimy rozwiązanie FPE dla  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa. Nasz wynik jest uogólnieniem rozwiązania Peřiny i współpracowników [24]. Przedstawimy rozwiązania dla  $s$ -sparametryzowanych funkcji charakterystycznych. W §3.1.3 rozważymy problem istnienia rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)} \equiv \mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  w zależności od warunków początkowych.

### 3.1.1 Opis w pełni kwantowy

Równanie Fokkera-Plancka w opisie całkowicie kwantowym można otrzymać z równania fundamentalnego ( 69) stosując wielokrotnie reguły odpowiedniości (75a-b). Po dość żmudnych obliczeniach otrzymujemy następujące uogólnione FPE dla  $s$ -sparametryzowanego rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)} \equiv \mathcal{W}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}^{(s)} = & \frac{1}{2} \gamma_S \left\{ \left[ -\frac{\partial}{\partial\alpha_L} \alpha_L \frac{\partial}{\partial\alpha_S} \alpha_S \right. \right. \\ & + \left( |\alpha_S|^2 + \frac{1+s}{2} \right) \frac{\partial}{\partial\alpha_L} \alpha_L - \left( |\alpha_L|^2 - \frac{1-s}{2} \right) \frac{\partial}{\partial\alpha_S} \alpha_S \\ & \left. \left. + \frac{1-s^2}{4} \left( \frac{\partial}{\partial\alpha_L} \alpha_L \frac{\partial}{\partial\alpha_S} \frac{\partial}{\partial\alpha_S^*} - \frac{\partial}{\partial\alpha_L} \frac{\partial}{\partial\alpha_L^*} \frac{\partial}{\partial\alpha_S} \alpha_S \right) + \text{c.c.} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (1-s)|\alpha_S|^2 + \frac{1-s^2}{2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \\
& + \left[ (1+s)|\alpha_L|^2 - \frac{1-s^2}{2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \frac{\partial}{\partial \alpha_S^*} \} \mathcal{W}^{(s)} \\
& + \frac{1}{2} \gamma_A \left\{ \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \alpha_A \right. \right. \\
& - \left( |\alpha_A|^2 - \frac{1-s}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L + \left( |\alpha_L|^2 + \frac{1+s}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \alpha_A \\
& \left. \left. - \frac{1-s^2}{4} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \frac{\partial}{\partial \alpha_A^*} - \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \alpha_A \right) + \text{c.c.} \right] \right. \\
& + \left[ (1+s)|\alpha_A|^2 - \frac{1-s^2}{2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \\
& + \left. \left[ (1-s)|\alpha_L|^2 + \frac{1-s^2}{2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \frac{\partial}{\partial \alpha_A^*} \right\} \mathcal{W}^{(s)} \\
& + \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{SA} \exp(-2i\Delta\Omega\Delta t) \left[ -\alpha_L^2 \left( \alpha_A^* \frac{\partial}{\partial \alpha_S} + \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} - \alpha_S^* \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right) \right. \right. \\
& + \alpha_L \left( (1+s)\alpha_A^* \frac{\partial}{\partial \alpha_S} + (1-s)\alpha_S^* \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \\
& + \left. \left. \left( \frac{1-s^2}{4} \alpha_A^* \frac{\partial}{\partial \alpha_S} - \alpha_S^* \alpha_A^* - \frac{1-s^2}{4} \alpha_S^* \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_L^2} \right] + \text{c.c.} \right\} \mathcal{W}^{(s)} \quad (77) \\
& + \gamma_S \langle \hat{n}_V \rangle \left\{ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L - \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \alpha_S + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \alpha_S + \text{c.c.} \right) \right. \\
& + \left. |\alpha_S|^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} + |\alpha_L|^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \frac{\partial}{\partial \alpha_S^*} \right\} \mathcal{W}^{(s)} \\
& + \gamma_A \langle \hat{n}_V \rangle \left\{ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L - \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \alpha_A + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \alpha_A + \text{c.c.} \right) \right. \\
& + \left. |\alpha_A|^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} + |\alpha_L|^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \frac{\partial}{\partial \alpha_A^*} \right\} \mathcal{W}^{(s)} \\
& - \left\{ \gamma_{AS} \langle \hat{n}_V \rangle \exp(2i\Delta\Omega\Delta t) \left[ \alpha_S^* \alpha_A^* \frac{\partial^2}{\partial \alpha_L^2} + \alpha_L^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha_L \left( \alpha_A^* \frac{\partial^2}{\partial \alpha_S} + \alpha_S^* \frac{\partial^2}{\partial \alpha_A} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \right] + \text{c.c.} \right\} \mathcal{W}^{(s)}.
\end{aligned}$$

Wynik ten przedstawiliśmy w artykule [64]. Dla wygody, zamiast terminu uogólnione równanie Fokkera-Plancka [24] będziemy używać zwykłego określenia równanie Fokkera-Plancka.

Spróbujemy znaleźć interpretację fizyczną równania (77). Człony przy  $\gamma_S$  opisują m.in. wzmocnienie modu stokesowskiego; człony przy  $\gamma_A$  reprezentują stratę energii z

modu antystokesowskiego do termostatu; człony przy  $\gamma_{AS}$  i  $\gamma_{SA}$  opisują stochastyczne sprzężenie między modami stokesowskim i antystokesowskim poprzez termostat; pozostałe człony przy  $\langle \hat{n}(\omega_{V_j}) \rangle \gamma_k$  określają przepływ fluktuacji z termostatu do pól promieniowania (tj. układu). Równanie ( 77) opisuje także ewolucję wiązki laserowej, tj. jej osłabienie, sprzężenie z polami rozproszonymi, jak również wprowadzenie fluktuacji termostatu do tego pola. Interpretacja członów przy  $\gamma_S$  ( $\gamma_A$ ), jako wzmocnienie (tłumienie) pól promieniowania, jest na razie intuicyjna, ale stanie się to bardziej zrozumiałe po zanalizowaniu rozwiązań w §3.1.2 i paragrafie 3.2 oraz w uzupełnieniu **D**.

Równanie ( 77) ma bardzo skomplikowaną strukturę. Niemniej jednak można wyznaczyć o wiele prostsze równania ruchu dla wartości średnich  $\langle \alpha_k \rangle$ ,  $\langle \alpha_k \alpha_l \rangle$ ,  $\langle \alpha_k^* \alpha_l \rangle$ , (dla  $k, l = L, S, A$ ). W szczególności, gdy  $\gamma_{AS} = 0$ , otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}(\langle \hat{n}_L(t) \rangle + \langle \hat{n}_S(t) \rangle + \langle \hat{n}_A(t) \rangle) = 0, \quad (78)$$

gdzie  $\langle \hat{n}_k(t) \rangle = \langle \alpha_k^* \alpha_k \rangle$ . Zależność ( 78) oznacza, że całkowita liczba fotonów (we wszystkich polach promieniowania) jest stałą ruchu, jeśli tylko nie uwzględnić w ( 69) wyrazów proporcjonalnych do  $\gamma_{AS}$  i  $\gamma_{SA}$ . Równanie ( 77) zawiera człony postaci  $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \alpha_j \alpha_k \alpha_l \mathcal{W}^{(s)}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha_k \alpha_l \mathcal{W}^{(s)}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \alpha_l \mathcal{W}^{(s)}$ , gdzie  $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \alpha_l = \alpha_L, \alpha_L^*, \alpha_S, \alpha_S^*, \alpha_A, \alpha_A^*$ . Jak widać większość elementów wektora dryftu jest nieliniowa do trzeciej potęgi  $\alpha$ , jak również większość elementów macierzy dyfuzji jest nieliniowa w kwadracie. Sprawia to szczególną trudność w znalezieniu rozwiązania równania różniczkowego. Oprócz tego, FPE ( 77) dla  $\mathcal{W}^{(s)} \equiv \mathcal{W}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A, t)$  z parametrem  $s \neq \pm 1$  zawiera pochodne trzeciego rzędu w członach  $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \alpha_l \mathcal{W}^{(s)}$ . Nota bene, pochodne trzeciego rzędu w FPE pojawiają się w wielu modelach [24, 71], na przykład w modelach tłumionego i wzmacnianego oscylatora anharmonicznego. Równania Fokkera-Plancka (444) i (H.2), dla tych modeli oscylatora anharmonicznego, będą podstawą naszych rozważań w paragrafie 7.4 i uzupełnieniu **H**.

Analogiczne równania ruchu dla  $s$ -sparametryzowanej funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_L, \beta_S, \beta_A, t)$  może być wyprowadzone zarówno z równania fundamentalnego ( 69), wykorzystując reguły odpowiedniości ( 76a-b), jak i z FPE ( 77) – stosując transformatę Fouriera ( 4) po zmiennych  $\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A$ . Po przekształceniach otrzymujemy poszukiwane

równanie ruchu dla  $\mathcal{C}^{(s)} \equiv \mathcal{C}^{(s)}(\beta_L, \beta_S, \beta_A, t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}^{(s)} = & \frac{1}{2} \gamma_S \left\{ \left[ -\beta_L \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_S} \right. \right. \\
& + \beta_L \left( -\frac{1+s}{2} + \frac{\partial}{\partial \beta_S} \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_L} \\
& - \beta_S \left( \frac{1-s}{2} + \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_L^*} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_S} \\
& \left. \left. + \frac{1-s^2}{4} \left( |\beta_S|^2 \beta_L \frac{\partial}{\partial \beta_L} - |\beta_L|^2 \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_S} \right) + \text{c.c.} \right] \right. \\
& + |\beta_L|^2 \left[ -\frac{1-s^2}{2} + (1-s) \frac{\partial}{\partial \beta_S} \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} \right] \\
& \left. + |\beta_S|^2 \left[ \frac{1-s^2}{2} + (1+s) \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_L^*} \right] \right\} \mathcal{C}^{(s)} \\
& + \frac{1}{2} \gamma_A \left\{ \left[ -\beta_L \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_A} \right. \right. \\
& - \beta_L \left( \frac{1-s}{2} + \frac{\partial}{\partial \beta_A} \frac{\partial}{\partial \beta_A^*} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_L} \\
& + \beta_A \left( -\frac{1+s}{2} + \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_L^*} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_A} \\
& \left. \left. + \frac{1-s^2}{4} \left( -|\beta_A|^2 \beta_L \frac{\partial}{\partial \beta_L} + |\beta_L|^2 \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_A} \right) + \text{c.c.} \right] \right. \\
& + |\beta_L|^2 \left[ \frac{1-s^2}{2} + (1+s) \frac{\partial}{\partial \beta_A} \frac{\partial}{\partial \beta_A^*} \right] \\
& \left. + |\beta_A|^2 \left[ -\frac{1-s^2}{2} + (1-s) \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_L^*} \right] \right\} \mathcal{C}^{(s)} \\
& + \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{SA} \exp(-2i\Delta\Omega\Delta t) \left[ \left( \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} - \beta_S \beta_A - \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_A^*} \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta_L^2} \right. \right. \\
& + \beta_L^* \left( (1-s) \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} + (1+s) \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_A^*} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_L} \\
& \left. \left. - \beta_L^{*2} \left( \frac{1-s^2}{4} \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} + \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} \frac{\partial}{\partial \beta_A^*} - \frac{1-s^2}{4} \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_A^*} \right) \right] + \text{c.c.} \right\} \mathcal{C}^{(s)} \\
& + \gamma_S \langle \hat{n}_V \rangle \left\{ - \left( \frac{1}{2} \beta_L \frac{\partial}{\partial \beta_L} + \beta_L \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_S} + \frac{1}{2} \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_S} + \text{c.c.} \right) \right. \\
& \left. + |\beta_S|^2 \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_L^*} + |\beta_L|^2 \frac{\partial}{\partial \beta_S} \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} \right\} \mathcal{C}^{(s)} \\
& + \gamma_A \langle \hat{n}_V \rangle \left\{ - \left( \frac{1}{2} \beta_L \frac{\partial}{\partial \beta_L} + \beta_L \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_A} + \frac{1}{2} \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_A} + \text{c.c.} \right) \right. \\
& \left. + |\beta_A|^2 \frac{\partial}{\partial \beta_L} \frac{\partial}{\partial \beta_L^*} + |\beta_L|^2 \frac{\partial}{\partial \beta_A} \frac{\partial}{\partial \beta_A^*} \right\} \mathcal{C}^{(s)}
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{AS} \langle \hat{n}_V \rangle \exp(2i\Delta\Omega\Delta t) \left[ \beta_S \beta_A \frac{\partial^2}{\partial \beta_L^2} + \beta_L^{*2} \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} \frac{\partial^2}{\partial \beta_A^*} \right. \right. \\
& \left. \left. - \beta_L^* \left( \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_A^*} + \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_S^*} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_L} \right] + \text{c.c.} \right\} \mathcal{C}^{(s)}.
\end{aligned}$$

Równanie ( 79) ma szereg cech FPE ( 77), stąd też napotykamy na podobne trudności w znalezieniu jego analitycznego rozwiązania, m.in.: nieliniowość współczynników przy członach z pierwszymi i drugimi pochodnymi oraz obecność członów z pochodnymi trzeciego rzędu. Jednak, w przeciwieństwie do ( 77), istnienie rozwiązania równania ( 79) dla  $\mathcal{C}^{(s_1)}$  (dla jakiegoś konkretnego  $s_1$ ) pociąga za sobą istnienie rozwiązania dla dowolnego innego parametru  $s_2$ , co wynika z własności ( 11).

Z uwagi na wyjątkowo skomplikowaną strukturę równań ( 77) i ( 79), lub też równoważnych równań ruchu wyprowadzonych w ramach całkowicie kwantowego modelu opisującego pola stokesowskie i antystokesowskie, wydaje się, że ściśle analityczne rozwiązanie nie istnieje. Do podobnych wniosków doszedł Peřina [24]. Przyjmijmy kolejne przybliżenia w omawianym modelu, aby otrzymać analityczne rozwiązania uproszczonego równania ( 77). W paragrafie 3.2 przedstawimy ściśle analityczne rozwiązanie dwumodowego równania fundamentalnego (z uwzględnieniem osłabienia pola pompującego) stosując metodę transformat Laplace'a do równania w reprezentacji fokowskiej. W §3.1.2 znajdziemy rozwiązanie dwumodowego FPE dla  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  i rozwiązanie odpowiadającego mu równania ruchu dla  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$  w modelu rozpraszania ramanowskiego w przybliżeniu parametrycznym. W uzupełnieniu **B** podamy rozwiązanie zlinearyzowanego trójmodowego FPE dla  $\mathcal{W}^{(-1)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A, t)$ , opisujące ewolucję pól promieniowania przy założeniu małych fluktuacji wokół ich średnich wartości. W tym modelu rozważymy jedynie funkcję  $Q$  ( $s = -1$ ), żeby ograniczyć problemy związane z nieistnieniem rozwiązań, a także, aby rząd równania zredukować o jeden.

### 3.1.2 Opis w przybliżeniu parametrycznym

Przedstawimy teraz rozwiązanie równania fundamentalnego ( 69) w przybliżeniu parametrycznym, tj. dla modelu rozpraszania z klasycznym polem pompującym. Przy tym założeniu, trójliniowe hamiltoniany  $\hat{H}_S$  ( 66a) i  $\hat{H}_A$  ( 66b) redukują się do form

dwuliniowych, w wyniku zastąpienia operatorów anihilacji pola laserowego  $\hat{a}_L$  (kreacji  $\hat{a}_L^+$ ) przez zespoloną amplitudę pola klasycznego  $e_L$  ( $e_L^*$ ). To przybliżenie efektywnie linearyzuje omawiany model rozpraszania ramanowskiego. Otrzymujemy następujące równanie Fokkera-Plancka dla dwumodowego  $s$ -sparametryzowanego rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t) = & \left\{ - \left[ \left( \frac{\kappa_S}{2} + i\Delta\Omega \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \alpha_S + \text{c.c.} \right] \right. \\
& + \left[ \left( \frac{\kappa_A}{2} - i\Delta\Omega \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \alpha_A + \text{c.c.} \right] \\
& - \left[ \frac{\kappa_{SA}}{2} \left( \alpha_A^* \frac{\partial}{\partial \alpha_S} - \alpha_S^* \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right) + \text{c.c.} \right] \\
& + \kappa_S \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{s+1}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_S \partial \alpha_S^*} \\
& + \kappa_A \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1-s}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_A \partial \alpha_A^*} \\
& \left. - \left[ \kappa_{SA} \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_S \partial \alpha_A} + \text{c.c.} \right] \right\} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t).
\end{aligned} \tag{80}$$

W wyprowadzeniu zastosowaliśmy reguły odpowiedniości ( 75a-b) do równania fundamentalnego ( 69) z klasyczną amplitudą  $e_L$  zamiast operatora  $\hat{a}_L$ . Dokonałiśmy także transformacji zmiennych  $\alpha_k \rightarrow \exp(-i\Delta\Omega\Delta t)\alpha_k$  i  $\beta_k \rightarrow \exp(-i\Delta\Omega\Delta t)\beta_k$ , gdzie niedopasowanie częstości  $\Delta\Omega$  określono wzorem ( 71). Dla prostoty, zespoloną amplitudę  $e_L$  włączyliśmy do stałych  $\kappa_S = \gamma_S |e_L|^2$ ,  $\kappa_A = \gamma_A |e_L|^2$  i  $\kappa_{SA} = \kappa_{AS}^* = \gamma_{SA} e_L^2$ .

Nasze równanie Fokkera-Plancka ( 80) jest uogólnieniem, na dowolny parametr  $s$  z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , równań wyprowadzonych przez Wallsa dla funkcji P ( $s = 1$ ) [87] oraz przez Peřinę dla funkcji  $P$  i  $Q$  ( $s = \pm 1$ ) [91, 92]. Jeśli rozważyć jedynie rozpraszanie stokesowskie (z pominięciem antystokesowskiego) to wzór ( 80) redukuje się do  $s$ -parametryzowanego FPE otrzymanego przez Peřinová i in. [126].

Spróbujmy podać interpretację FPE ( 80). Pierwszy człon w ( 80) opisuje wzmocnienie pola stokesowskiego, podczas gdy drugi — osłabienie pola antystokesowskiego. Oddziaływanie stokesowskie w przybliżeniu parametrycznym można traktować jako proces wzmacniania parametrycznego, natomiast oddziaływanie antystokesowskie odpowiada parametrycznej konwersji częstotliwości. Trzeci człon w ( 80) opisuje sprzę-



zenie między modami stokesowskim i antystokesowskim; pozostałe trzy człony opisują (gdy  $T > 0$ ) wprowadzenie szumów z termostatu do układu. W przeciwieństwie do poprzednich równań ruchu, ( 69), ( 77) i ( 79), tracimy wszelką informację o ewolucji wiązki pompującej.

Jak widać, FPE ( 80) nie zawiera pochodnych trzeciego rzędu dla żadnego  $s$ -sparametryzowanego rozkładu  $\mathcal{W}^{(s)}$  (nawet gdy  $s \neq \pm 1$ ). Przypomnijmy, że FPE ( 77) w opisie całkowicie kwantowym zawierało pochodne trzeciego rzędu.

Z uwagi na to, że wektory dryftu są liniowe, a elementy macierzy dyfuzji są stałe, równanie ( 80) opisuje proces Ornsteina-Uhlenbecka [21]. Opracowano różne metody rozwiązywania równań ruchu dla procesów Ornsteina-Uhlenbecka [20, 24]. Na przykład, jeśli zastosujemy transformatę Fouriera ( 4) do rozkładu  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  (względem zmiennych  $\alpha_S, \alpha_A$ ), to otrzymamy równanie różniczkowe pierwszego rzędu dla funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t) = & \left\{ \left[ \left( \frac{\kappa_S}{2} - i\Delta\Omega \right) \beta_S \frac{\partial}{\partial \beta_S} + \text{c.c.} \right] \right. \\
& - \left[ \left( \frac{\kappa_A}{2} + i\Delta\Omega \right) \beta_A \frac{\partial}{\partial \beta_A} + \text{c.c.} \right] \\
& + \left[ \frac{\kappa_{SA}}{2} \left( \beta_A^* \frac{\partial}{\partial \beta_S} - \beta_S^* \frac{\partial}{\partial \beta_A} \right) + \text{c.c.} \right] \\
& - \kappa_S \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{s+1}{2} \right) |\beta_S|^2 \\
& - \kappa_A \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1-s}{2} \right) |\beta_A|^2 \\
& \left. - \left[ \kappa_{AS} \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1}{2} \right) \beta_S \beta_A + \text{c.c.} \right] \right\} \mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t).
\end{aligned} \tag{81}$$

Inna metoda prowadząca do powyższego równania na funkcję charakterystyczną ( 4) polega na zastosowaniu reguł ( 76a-b) do wzoru ( 69), gdy  $\hat{a}_L \mapsto e_L$ .

Model rozpraszania ramanowskiego w przybliżeniu parametrycznym był wielokrotnie studiowany przez Peřinę i jego współpracowników [91, 92, 127, 97] (także [24]). Jednak rozwiązania równań ruchu dla tego modelu były przez nich wyprowadzone tylko dla  $\mathcal{W}^{(\pm 1)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  (tj. dla funkcji  $Q$  i  $P$ ) oraz funkcji charakterystycznych  $\mathcal{C}^{(\pm 1)}(\beta_S, \beta_A, t)$ . W tym paragrafie uogólnimy wyniki Peřiny na dowolnie  $s$ -sparametryzowane funkcje

$\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  i  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$ .

Wprowadzimy następującą uproszczoną notację dla funkcji opisujących szum kwantowy, tj. dla kowariancji Wignera, wariancji, a także dla średnich wartości operatorów anihilacji  $\hat{a}_S$  and  $\hat{a}_A$ :

$$B_k^{(s)}(t) = \frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{a}_k^+(t), \Delta \hat{a}_k(t) \} \rangle - \frac{s}{2}, \quad (82a)$$

$$D_{kl}(t) = D_{lk}(t) = \frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{a}_k(t), \Delta \hat{a}_l(t) \} \rangle, \quad (82b)$$

$$\bar{D}_{kl}(t) = \bar{D}_{lk}^*(t) = -\frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{a}_k^+(t), \Delta \hat{a}_l(t) \} \rangle, \quad (k \neq l), \quad (82c)$$

$$C_k(t) = \langle (\Delta \hat{a}_k(t))^2 \rangle, \quad (82d)$$

$$\xi_k(t) = \langle \hat{a}_k(t) \rangle, \quad (82e)$$

gdzie  $k = S, A$  i  $\{ \dots, \dots \}$  jest antykomutatorem. Symbole (82a-e) wprowadzamy za artykułem [24] z tym, że uogólniliśmy współczynnik  $B_k \mapsto B_k^{(s)}$ . Przy warunku początkowym, że pole stokesowskie i antystokesowskie są stochastycznie niezależne, znajdujemy następujące rozwiązanie równania (81), słuszne dla dowolnej wartości parametru  $s$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t) = \exp \left\{ \sum_{k=S,A} \left[ -B_k^{(s)}(t) |\beta_k|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{2} C_k^*(t) \beta_k^2 + \text{c.c.} \right) + (\beta_k \xi_k^*(t) - \text{c.c.}) \right] \right. \\ \left. + \left[ D_{SA}(t) \beta_S^* \beta_A^* + \bar{D}_{SA}(t) \beta_S \beta_A^* + \text{c.c.} \right] \right\}, \quad (83) \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_S^{(s)}(t) = & \left( B_S^{(s)} + \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1+s}{2} \right) |U_S(t)|^2 \\ & + \left( B_A^{(s)} - \langle \hat{n}_V \rangle - \frac{1-s}{2} \right) |V_S(t)|^2 - \langle \hat{n}_V \rangle - \frac{1+s}{2}, \quad (84a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_A^{(s)}(t) = & \left( B_A^{(s)} - \langle \hat{n}_V \rangle - \frac{1-s}{2} \right) |U_A(t)|^2 \\ & + \left( B_S^{(s)} + \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1+s}{2} \right) |V_A(t)|^2 + \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1-s}{2}, \quad (84b) \end{aligned}$$

$$D_{SA}(t) = \left( B_S^{(s)} + \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1+s}{2} \right) U_S(t) V_A(t) + \left( B_A^{(s)} - \langle \hat{n}_V \rangle - \frac{1-s}{2} \right) V_S(t) U_A(t), \quad (84c)$$

$$\bar{D}_{SA}(t) = C_S U_S(t) V_A^*(t) + C_A^* U_A^*(t) V_S(t), \quad (84d)$$

$$C_S(t) = C_S U_S^2(t) + C_A^* V_S^2(t), \quad (84e)$$

$$C_A(t) = C_A U_A^2(t) + C_S^* V_A^2(t), \quad (84f)$$

$$\xi_S(t) = U_S(t) \xi_S + V_S(t) \xi_A^*, \quad (84g)$$

$$\xi_A(t) = U_A(t) \xi_A + V_A(t) \xi_S^*. \quad (84h)$$

Nasze rozwiązanie ( 83) dla funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$  ( $s \in \langle -1, 1 \rangle$ ) jest uogólnieniem rozwiązania podanego przez Kárską i Peřinę [97] dla funkcji  $\mathcal{C}^{(1)}(\beta_S, \beta_A, t)$  odpowiadającej normalnemu uporządkowaniu operatorów pola. Rozwiązanie ( 83) dla  $s = \pm 1$  redukuje się do rozwiązania Peřiny [91], przy założeniu, że  $C_A = C_S = 0$ , co narzuca zerowanie się współczynników  $\bar{D}_{SA}(t) = C_A(t) = C_S(t) = 0$  dla dowolnej chwili. Funkcje  $U_k(t)$ ,  $V_k(t)$  ( $k = S, A$ ) pojawiające się w równaniach ( 84a-h) można wyrazić następująco:

$$V_S(t) = \frac{\kappa_{SA}}{2} Q_1, \quad (85a)$$

$$V_A(t) = -\frac{\kappa_{SA}}{2} Q_1^*, \quad (85b)$$

$$U_S(t) = Q_2 + \left( \frac{\kappa_A}{2} + i\Delta\Omega \right) Q_1, \quad (85c)$$

$$U_A(t) = Q_2^* - \left( \frac{\kappa_S}{2} - i\Delta\Omega \right) Q_1^*, \quad (85d)$$

korzystając z pomocniczych funkcji

$$Q_1 = \frac{\exp(P_1 \Delta t) - \exp(P_2 \Delta t)}{P_1 - P_2}, \quad (86a)$$

$$Q_2 = \frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{P_1 \exp(P_1 \Delta t) - P_2 \exp(P_2 \Delta t)}{P_1 - P_2}, \quad (86b)$$

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa_S - \kappa_A}{2} \pm \left[ \left( \frac{\kappa_S - \kappa_A}{2} \right)^2 - 4 \left( (\Delta\Omega)^2 - i \frac{\kappa_S + \kappa_A}{2} \Delta\Omega \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (87)$$

Łatwo zauważyć, że w chwili początkowej  $\tau_0$  zachodzi  $V_k(t_0) = 0$  i  $U_k(t_0) = 1$ . Zatem początkowe kowariancje Wignera  $D_{k,l}$  i  $\bar{D}_{k,l}$  ( $k, l = S, A$ ) znikają, co jest odzwierciedleniem warunku początkowego o braku stochastycznych korelacji między polami rozproszonymi. Przy założeniu dopasowania częstości  $\Delta\Omega = 0$  funkcje (85a)–(87) znacznie się upraszczają [91], gdyż  $P_1 = \frac{1}{2}(\kappa_S - \kappa_A)$  i  $P_2 = 0$ . W szczególności prowadzi to do związków:

$$V_S(t) + V_A(t) = 0, \quad (88a)$$

$$U_S(t) + U_A(t) = 1 + \exp\left(\frac{\kappa_S - \kappa_A}{2} \Delta t\right). \quad (88b)$$

Aby otrzymać rozwiązanie FPE (80) zastosujemy transformatę Fouriera (3) funkcji  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$ , co w wyniku prowadzi do poszukiwanego  $s$ -sparametryzowanego rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  w postaci:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t) &= \frac{1}{L^{(s)}} \exp \left\{ (L^{(s)})^{-2} \left[ -E_1 |\alpha_S - \xi_S(t)|^2 - E_2 |\alpha_A - \xi_A(t)|^2 \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} E_3 (\alpha_S^* - \xi_S^*(t))^2 + \frac{1}{2} E_4 (\alpha_A^* - \xi_A^*(t))^2 \\ &\quad + E_5 (\alpha_S^* - \xi_S^*(t)) (\alpha_A^* - \xi_A^*(t)) \\ &\quad \left. \left. + E_6 (\alpha_S - \xi_S(t)) (\alpha_A^* - \xi_A^*(t)) + \text{c.c.} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (89)$$

gdzie  $s$ -sparametryzowane funkcje  $E_i$  i  $L^{(s)}$  są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} E_1 &= B_S^{(s)}(t) K_A^{(s)}(t) - B_A^{(s)}(t) K_+(t) \\ &\quad + (C_A^*(t) D_{SA}(t) \bar{D}_{SA}(t) + \text{c.c.}), \\ E_2 &= B_A^{(s)}(t) K_S^{(s)}(t) - B_S^{(s)}(t) K_+(t) \\ &\quad + (C_S(t) D_{SA}^*(t) \bar{D}_{SA}(t) + \text{c.c.}), \\ E_3 &= C_S(t) K_A^{(s)}(t) + 2B_A^{(s)}(t) D_{SA}(t) \bar{D}_{SA}^*(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_A^*(t)D_{SA}^2(t) + C_A(t)\bar{D}_{SA}^{*2}(t), \tag{90} \\
E_4 & = C_A(t)K_S^{(s)}(t) + 2B_S^{(s)}(t)D_{SA}(t)\bar{D}_{SA}(t) \\
& + C_S(t)\bar{D}_{SA}^2(t) + C_S^*(t)D_{SA}^2(t), \\
E_5 & = D_{SA}(t) \left[ B_S^{(s)}(t)B_A^{(s)}(t) - K_-(t) \right] \\
& + B_S^{(s)}(t)C_A(t)\bar{D}_{SA}^*(t) + B_A^{(s)}(t)C_S(t)\bar{D}_{SA}(t) \\
& + C_S(t)C_A(t)D_{SA}^*(t), \\
E_6 & = -\bar{D}_{SA}(t) \left[ B_S^{(s)}(t)B_A^{(s)}(t) + K_-(t) \right] \\
& - B_S^{(s)}(t)C_A(t)D_{SA}^*(t) - B_A^{(s)}(t)C_S^*(t)D_{SA}(t) \\
& - C_S^*(t)C_A(t)\bar{D}_{SA}^*(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L^{(s)})^2 & = K_S^{(s)}(t)K_A^{(s)}(t) - 2B_S^{(s)}(t)B_A^{(s)}(t)K_+(t) \\
& - [C_S(t)C_A(t)D_{SA}^{*2}(t) + C_S(t)C_A^*(t)\bar{D}_{SA}^2(t) \\
& + 2B_S^{(s)}(t)C_A^*(t)D_{SA}(t)\bar{D}_{SA}(t) \\
& + 2B_A^{(s)}(t)C_S^*(t)D_{SA}^*(t)\bar{D}_{SA}(t) + \text{c.c.}] + K_-^2(t), \tag{91}
\end{aligned}$$

gdzie

$$K_{S,A}^{(s)}(t) = \left( B_{S,A}^{(s)}(t) \right)^2 - |C_{S,A}(t)|^2, \tag{92a}$$

$$K_{\pm}(t) = |D_{SA}(t)|^2 \pm |\bar{D}_{SA}(t)|^2. \tag{92b}$$

Nasze rozwiązanie ( 89) dla dowolnie  $s$ -sparametryzowanego rozkładu  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$ , jest uogólnieniem wyniku Kárskiej i Peřiny [97] oraz Peřinovej [128] dla antynormalnego sparametryzowania (tj.  $s = -1$ ). Dwumodowe funkcje  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  ( 89) i  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$  ( 83) redukują się do wyrażeń jednomodowych  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_k, t)$  i  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_k, t)$  ( $k = S, A$ ) poprzez proste podstawienie  $\alpha_S = \beta_S = 0$  albo  $\alpha_A = \beta_A = 0$ . W wyniku tej procedury, współczynniki  $V_S(t)$ ,  $V_A(t)$ ,  $D_{SA}(t)$  i  $\bar{D}_{SA}(t)$  też znikają, a  $L^{(s)}$  upraszcza się do postaci  $\sqrt{K_k^{(s)}(t)}$ .

### 3.1.3 Zagadnienie istnienia sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa

W tym paragrafie zajmiemy się zagadnieniem istnienia  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  ( 89). Podkreślamy, że rozwiązanie ( 83) równania ( 81) dla funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$  istnieje dla dowolnego parametru  $s$  w przeciwieństwie do rozwiązania ( 89) równania ( 80) dla rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$ . W omawianym modelu rozpraszania ramanowskiego problem istnienia QPD ( 89) wiąże się z istnieniem transformaty Fouriera ( 3) dla funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$  ( 83) i sprowadza się do spełnienia czterech warunków [129, 130, 128]. W naszej notacji dla sparametryzowanych funkcji, warunki te można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & 0 < K_A^{(s)}(t), \\
(ii) \quad & 0 < L^{(s)}(t), \\
(iii) \quad & 0 < \operatorname{Re} C_A(t) + B_A^{(s)}(t), \\
(iv) \quad & 0 < \bar{L}^{(s)} \equiv \left( K_A^{(s)}(t) \right)^{1/2} \left[ \operatorname{Re} C_S(t) + B_S^{(s)}(t) \right] + \left( K_A^{(s)}(t) \right)^{-1/2} \\
& \quad \times \left[ \operatorname{Re} C_A^*(t) (\bar{D}_{SA}(t) - D_{SA}(t))^2 \right. \\
& \quad \left. - B_A^{(s)}(t) |\bar{D}_{SA}(t) - D_{SA}(t)|^2 \right].
\end{aligned} \tag{93}$$

Założmy dla konkretnego  $s_1$ , że przynajmniej jedna funkcja z powyższych czterech (93) nie zawsze jest dodatnio określona. Wówczas równanie ( 80) nie powinno być interpretowane jako zwykłe  $s_1$ -parametryzowane FPE, lecz należy rozumieć je w sensie uogólnionego FPE. Podkreślmy, że chociaż rozkład  $\mathcal{W}^{(s_1)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  może nie istnieć jako nieosobliwa funkcja, to jednak w myśl twierdzeń Klaudera-Sudarshana , zawsze istnieje w terminach funkcji uogólnionych (dystrybucji). Na marginesie pragniemy wspomnieć o możliwości użycia uogólnionych reprezentacji  $P$  Drummonda i Gardinera [9] zamiast reprezentacji (funkcji )  $P$  Glaubera-Sudarshana. Uogólnione reprezentacje  $P$  były wielokrotnie skutecznie wykorzystywane przy rozwiązywaniu równań fundamentalnych opisujących różne nieliniowe problemy (vide e.g. [9, 16, 34, 11]). Metoda m.in. polega na podwojeniu przestrzeni fazowej. W naszej sytuacji oznacza to konieczność

posługiwania się uogólnioną reprezentacją  $P$  zależną od ośmiu rzeczywistych argumentów (nie licząc czasu) zamiast rozkładu  $\mathcal{W}^{(s)}$  (89) zależnego od czterech zmiennych:  $\text{Re}\alpha_L$ ,  $\text{Re}\alpha_S$ ,  $\text{Im}\alpha_L$ ,  $\text{Im}\alpha_S$ .

Przeanalizujemy kilka konkretnych sytuacji. Załóżmy, że pola stokesowskie i antystokesowskie są początkowo koherentne, co oznacza, że współczynniki  $C_S$ ,  $C_A$  i  $\bar{D}_{SA}$  znikają. Wówczas skomplikowane wyrażenia na  $\bar{L}^{(s)}$  (93) i  $L^{(s)}$  (91) upraszczają się do postaci

$$\bar{L}^{(s)} = B_S^{(s)}(t)B_A^{(s)}(t) - |D_{SA}(t)|^2, \quad (94)$$

$$L^{(s)} = \left| B_S^{(s)}(t)B_A^{(s)}(t) - |D_{SA}(t)|^2 \right|. \quad (95)$$

Jak widać, w przypadku pól początkowo koherentnych wystarczającym warunkiem istnienia rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  (89) jest jedynie dodatnia określoność funkcji  $\bar{L}^{(s)}$  (94). Przy założeniu dopasowania częstości ( $\Delta\Omega = 0$ ) wyrażenia można jeszcze bardziej uprościć. Funkcje  $B_{S,A}^{(s)}(t)$  i  $D_{SA}(t)$  (84a-c) sprowadzają się do postaci

$$B_S^{(s)}(t) = \frac{\kappa_S}{\kappa_S - \kappa_A} f_- \left( \frac{\kappa_S}{\kappa_S - \kappa_A} f_+ - 2 \frac{\kappa_A}{\kappa_S - \kappa_A} + \langle \hat{n}_V \rangle f_+ \right) + \frac{1-s}{2} \geq 0, \quad (96a)$$

$$B_A^{(s)}(t) = \frac{\kappa_A}{\kappa_S - \kappa_A} f_- \left( \frac{\kappa_S}{\kappa_S - \kappa_A} f_- + \langle \hat{n}_V \rangle f_+ \right) + \frac{1-s}{2} \geq 0, \quad (96b)$$

$$|D_{SA}(t)| = \frac{\sqrt{\kappa_S \kappa_A}}{\kappa_S - \kappa_A} f_- \left( \frac{\kappa_S}{\kappa_S - \kappa_A} f_- + \langle \hat{n}_V \rangle f_+ + 1 \right), \quad (96c)$$

gdzie

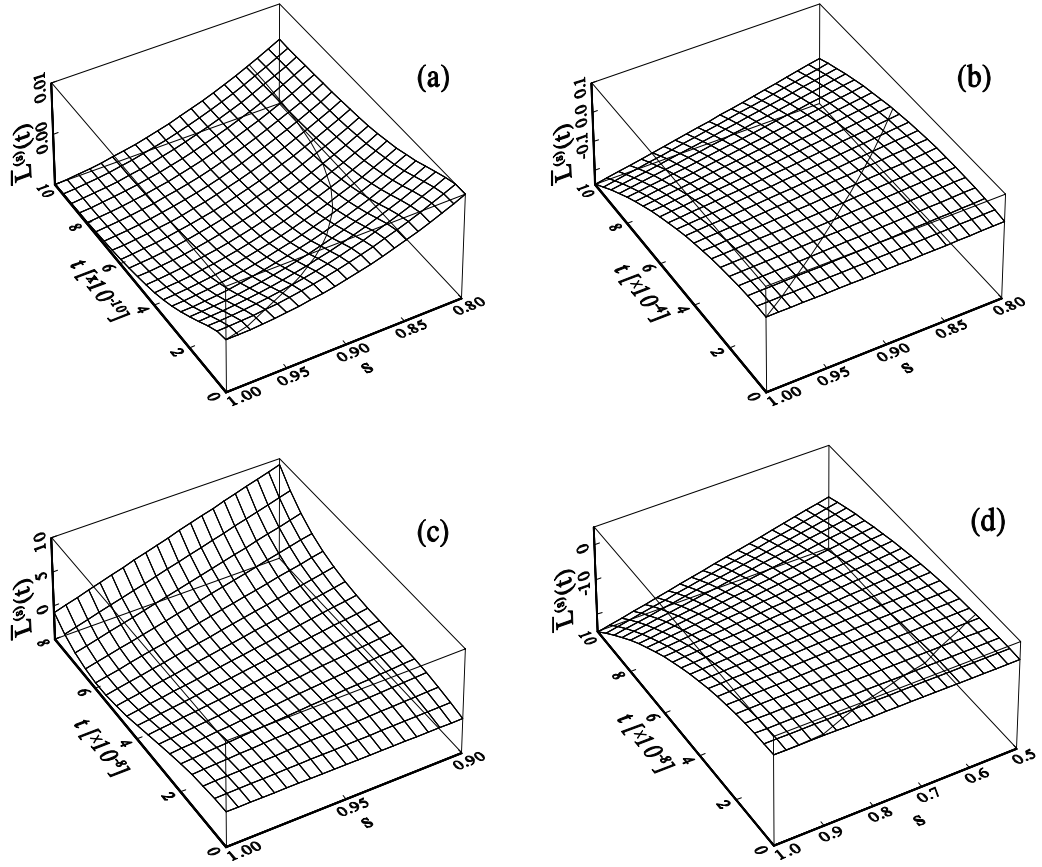
$$f_{\pm} = \exp\left(\frac{\kappa_S - \kappa_A}{2} \Delta t\right) \pm 1. \quad (97)$$

W szczególności, funkcja Wignera istnieje ponieważ zachodzi nierówność

$$\bar{L}^{(0)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{\exp[(\kappa_S - \kappa_A)\Delta t] - 1}{\kappa_S - \kappa_A} [\langle \hat{n}_V \rangle (\kappa_S + \kappa_A) + \kappa_S] > 0, \quad (98)$$

w przeciwieństwie do funkcji  $P$ , która dla  $t > t_0$ , nie istnieje (co pokazał Peřina [91]):

$$\bar{L}^{(1)} = -\frac{\kappa_S \kappa_A}{(\kappa_S - \kappa_A)^2} \left[ \exp\left(\frac{\kappa_S - \kappa_A}{2} \Delta t\right) - 1 \right]^2 < 0 \quad \text{gdy } \Delta t > 0. \quad (99)$$



Rys. 1:

Współczynnik  $\bar{L}^{(s)}(t)$  w zależności od czasu  $t$  i parametru  $s$ , określający istnienie rozkładu quasi-prawdopodobieństwa  $W^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$ . Dobrano następujące wartości: **(a)**  $\kappa_S = 10^8$ ,  $\kappa_A = 10^{10}$ ,  $|\Delta\Omega| = 1 \div 10^6$  (w tym przedziale  $|\Delta\Omega|$  powierzchnie się pokrywają),  $\langle \hat{n}_V \rangle = 0$ ; **(b)**  $\kappa_S = \kappa_A = 10^3$ ,  $|\Delta\Omega| = 1$ ,  $\langle \hat{n}_V \rangle = 0 \div 100$ ; **(c)**  $\kappa_S = \kappa_A = 10^8$ ,  $|\Delta\Omega| = 10^6$ ,  $\langle \hat{n}_V \rangle = 10$ ; oraz **(d)**  $\kappa_S = \kappa_A = 10^8$ ,  $|\Delta\Omega| = 10^6$ ,  $\langle \hat{n}_V \rangle = 0$ . Pola: stokesowskie i antystokesowskie są początkowo koherentne. Linia na powierzchniach określa  $\bar{L}^{(s)}(t) = 0$ .



Ogólnie, rozwiązanie ( 89) dla określonej chwili  $t$  istnieje dla parametrów  $s$  mniejszych niż

$$s < B_S^{(1)}(t) + B_A^{(1)}(t) + 1 - \sqrt{\left(B_S^{(1)}(t) + B_A^{(1)}(t)\right)^2 - 4\bar{L}^{(1)}}. \quad (100)$$

Przy założeniu równości stałych: tłumienia  $\gamma_A$  i wzmocnienia  $\gamma_S$ , co jest równoważne warunkowi  $\kappa_A = \kappa_S = \kappa$ , otrzymujemy wyrażenie

$$\bar{L}^{(s)} = \frac{1}{4}[(1-s)^2 + 2(1-s)(1 + 2\langle\hat{n}_V\rangle)\kappa\Delta t - s\kappa^2(\Delta t)^2], \quad (101)$$

które jest większe od zera dla parametrów  $s$  mniejszych niż

$$s < \frac{1}{2} + \frac{(\kappa\Delta t + 1)^2}{2} + \left\{ 2\langle\hat{n}_V\rangle - \left[ \left( 1 + 2\langle\hat{n}_V\rangle + \frac{\kappa\Delta t}{2} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \right\} \kappa\Delta t. \quad (102)$$

W szczególności,  $\bar{L}^{(1)}$  ( 99) dla funkcji  $P$  i  $\bar{L}^{(0)}$  ( 98) dla funkcji Wignera upraszczają się odpowiednio do

$$\bar{L}^{(1)} = -\left(\frac{\kappa\Delta t}{2}\right)^2 < 0, \quad \text{gdy } \Delta t > 0, \quad (103a)$$

$$\bar{L}^{(0)} = \frac{1}{4} + \left(\langle\hat{n}_V\rangle + \frac{1}{2}\right) \kappa\Delta t > 0. \quad (103b)$$

Wzór określający  $s$ , dla którego jest spełniony warunek  $\bar{L}^{(s)} > 0$ , nie może być wyrażony w prostej formie w przypadkach niedopasowania częstości  $\Delta\Omega \neq 0$ .

Jako kolejny przykład rozważymy sytuację, gdy pola rozproszone (stokesowskie i antystokesowskie) były początkowo chaotyczne. W sensie matematycznym ten przypadek różni się od poprzedniego (dla pól początkowo koherentnych) występowaniem niezerowych współczynników  $B_k^{(-1)} = \langle\hat{n}_{ch k}\rangle$  ( $k = S, A$ ). Jeśli skorzystać z relacji ( 84a-c), to łatwo pokazać, że funkcje  $B_k^{(s)}(t)$ ,  $D_{SA}(t)$  dla pól chaotycznych są niemalże takie same jak dla koherentnych. Pojawiają się jednak dodatkowe człony. Dla tej sytuacji otrzymujemy następujące wyrażenie na funkcję  $\bar{L}^{(s)}$  ( 91):

$$\begin{aligned} \bar{L}^{(s)} &= \left( B_S^{(s)}(t) + \langle\hat{n}_{ch S}\rangle |U_S(t)|^2 + \langle\hat{n}_{ch A}\rangle |V_S(t)|^2 \right) \\ &\times \left( B_A^{(s)}(t) + \langle\hat{n}_{ch A}\rangle |U_A(t)|^2 + \langle\hat{n}_{ch S}\rangle |V_A(t)|^2 \right) \\ &- \left| |D_{SA}| + \langle\hat{n}_{ch S}\rangle U_S(t)V_A(t) + \langle\hat{n}_{ch A}\rangle U_A(t)V_S(t) \right|^2, \end{aligned} \quad (104)$$

które ma podobną postać do wzoru ( 95). Występują w tym wyrażeniu funkcje  $B_k^{(s)}(t)$  i  $D_{SA}(t)$  określone (tym samym co poprzednio) wzorem ( 96a-c). W przypadku równych stałych  $\gamma_S = \gamma_A$  otrzymujemy związek

$$\begin{aligned} \bar{L}^{(s)} &= - \left( \frac{\gamma \Delta t}{2} \right)^2 s (\langle \hat{n}_{chA} \rangle + \langle \hat{n}_{chS} \rangle - 1) + \gamma \Delta t \left[ \langle \hat{n}_{chA} \rangle \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1+s}{2} \right) \right. \\ &+ \langle \hat{n}_{chS} \rangle \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1-s}{2} \right) + \left. \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1}{2} \right) (1-s) \right] \\ &+ \langle \hat{n}_{chA} \rangle \left( \langle \hat{n}_{chS} \rangle + \frac{1-s}{2} \right) + \langle \hat{n}_{chS} \rangle \frac{1-s}{2} + \left( \frac{1-s}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (105)$$

Widać, że funkcja Wignera zawsze istnieje (dla dowolnej chwili  $t$ ), gdyż

$$\begin{aligned} \bar{L}^{(0)} &= \gamma \Delta t (\langle \hat{n}_{chS} \rangle + \langle \hat{n}_{chA} \rangle + 1) \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1}{2} \right) \\ &+ \langle \hat{n}_{chA} \rangle \left( \langle \hat{n}_{chS} \rangle + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \langle \hat{n}_{chS} \rangle + \frac{1}{4} > 0, \end{aligned} \quad (106)$$

podczas gdy funkcja  $P$  istnieje tylko dla czasów krótszych niż

$$\begin{aligned} \Delta t &< \frac{2}{\gamma} (\langle \hat{n}_{chA} \rangle + \langle \hat{n}_{chS} \rangle + 1)^{-1} \left\{ \langle \hat{n}_{chA} \rangle^2 [\langle \hat{n}_{chS} \rangle + (\langle \hat{n}_V \rangle + 1)^2] \right. \\ &+ \langle \hat{n}_{chA} \rangle \langle \hat{n}_{chS} \rangle [\langle \hat{n}_{chS} \rangle + \langle \hat{n}_V \rangle^2 + (\langle \hat{n}_V \rangle + 1)^2] + \langle \hat{n}_{chS} \rangle^2 \langle \hat{n}_V \rangle^2 \left. \right\}^{1/2} \\ &+ \langle \hat{n}_{chA} \rangle (\langle \hat{n}_V \rangle + 1) + \langle \hat{n}_{chS} \rangle \langle \hat{n}_V \rangle. \end{aligned} \quad (107)$$

Relacja ( 105) jest kwadratowa względem  $s$ , zatem jest możliwe podanie analitycznego wzoru określającego największy parametr  $s$  ( $s \leq 1$ ), dla którego rozkład  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  istnieje w danej chwili  $\Delta t = t - t_0$ . Z braku miejsca nie podamy tej zależności.

Na rys. 1 przedstawiliśmy funkcję  $\bar{L}^{(s)}(t)$  dla różnych wartości: niedopasowania częstości  $\Delta\Omega$ , średniej liczby fononów  $\langle \hat{n}_V \rangle$  w modzie, (przeskalowanej) stałej tłumienia  $\kappa_A$  i stałej wzmocnienia  $\kappa_S$ . Założyliśmy, że pola stokesowskie i antystokesowskie były początkowo w stanach koherentnych. Zatem we wszystkich rozważanych sytuacjach (rys. 1a–1d) warunek dodatniej określoności funkcji  $\bar{L}^{(s)}(t)$  jest wystarczający dla istnienia odpowiadającego  $s$ -sparametryzowanego rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$ . Dla przejrzystości na rys. 1 wykreśliliśmy krzywą określoną warunkiem  $\bar{L}^{(s)}(t) = 0$ .

### 3.2 Równanie fundamentalne w reprezentacji fokowskiej

Przybliżenie parametryczne przyjęte w §3.1.2 i §3.1.3 efektywnie linearyzuje model rozpraszania ramanowskiego opisany przez hamiltonian ( 64). Przedstawimy teraz rozwiązanie nieliniowego problemu, tzn. bez stosowania przybliżenia parametrycznego. Równanie Fokkera-Plancka ( 77) (jak i odpowiadające mu równania ruchu ( 79) dla funkcji charakterystycznej) odsłania problemy związane z całkowicie kwantowym opisem rozpraszania ramanowskiego z równoczesnym uwzględnieniu pól stokesowskiego i antystokesowskiego. Załóżmy, że temperatura kryształu rozpraszającego jest dostatecznie niska tak, że średnia liczba fononów w modzie jest bliska zera, co wynika z przyjętego rozkładu Bosego-Einsteina ( 74). Pominiemy też promieniowanie antystokesowskie. Przyjmijmy więc, że  $\gamma_A = \gamma_{SA} = \gamma_{AS} = 0$ . Nasze równanie fundamentalne ( 69) redukuje się do prostej postaci [88]:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} ([\hat{a}_L \hat{a}_S^+, \hat{\rho} \hat{a}_L^+ \hat{a}_S] + [\hat{a}_L \hat{a}_S^+ \hat{\rho}, \hat{a}_L^+ \hat{a}_S]), \quad (108)$$

gdzie przeskalowaliśmy zmienną opisującą czas:  $t \rightarrow \tau = \gamma_S t$ . Oznaczmy elementy macierzowe zredukowanego operatora gęstości  $\hat{\rho}$  w reprezentacji fokowskiej przez

$$\langle n_L, n_S | \hat{\rho}(\tau) | n'_L, n'_S \rangle \equiv \langle n, m | \hat{\rho}(\tau) | n + \nu, m + \mu \rangle \equiv \rho_{n,m}(\nu, \mu, \tau). \quad (109)$$

dla prostoty utożsamiamy  $n_L = n$  i  $n_S = m$ ;  $\mu$  oznacza stopień niediagonalności<sup>18</sup> elementów macierzy  $\hat{\rho}$  dla pola stokesowskiego, natomiast  $\nu$  – stopień niediagonalności dla laserowego pola pompującego. Równanie fundamentalne w bazie stanów fokowskich, tj. dla elementów macierzowych ( 109), bezpośrednio wynika z równania ( 108) przyjmując postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho_{nm}(\nu, \mu, \tau) &= -\frac{1}{2} [n(m+1) + (n+\nu)(m+\mu+1)] \rho_{nm}(\nu, \mu, \tau) \\ &+ [(n+1)(n+\nu+1)m(m+\mu)]^{1/2} \rho_{n+1, m-1}(\nu, \mu, \tau). \end{aligned} \quad (110)$$

W szczególnym przypadku, równanie ( 110) dla diagonalnych elementów macierzowych  $\rho_{nm}(0,0,\tau)$  redukuje się do równania na liczbę fotonów<sup>19</sup> wyprowadzonych przez Loudona

<sup>18</sup>ang. degree of off-diagonality

<sup>19</sup>tłumaczenie ad sensum terminu ang. rate equation; równanie kinetyczne wydaje się pojęciem zbyt ogólnym

[110] oraz McNeila i Wallsa [88]. Simaan, w artykule [89] (także Loudon [110]), studiował rozpraszanie ramanowskie w gazie dwupoziomowych atomów. Przy założeniu, że prawie wszystkie atomy są w swych stanach podstawowych, to równanie Simaana na liczbę fotonów przyjmuje taką samą postać jak nasze równanie ( 110) dla elementów diagonalnych  $\rho_{nm}(00\tau)$  (tj. przy  $\nu = \mu = 0$ ).

Jako, że równanie ( 110) zawiera człony wyłącznie typu  $\rho_{nm}$  lub  $\rho_{n+1,m-1}$ , wnioskujemy o zachowaniu całkowitej liczby fotonów w naszym opisie:

$$\langle \hat{n}(\tau) \rangle + \langle \hat{m}(\tau) \rangle = \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{m} \rangle, \quad (111)$$

Wzór ( 111) jest szczególnym przypadkiem wyrażenia ( 78).

### 3.2.1 Opis w pełni kwantowy

Przedstawimy dokładne rozwiązanie równania fundamentalnego ( 110). To jest prawdopodobnie jeden z ważniejszych wyników tej dysertacji. Zastosujemy metodę transformat Laplace’a. Tę metodę wielokrotnie stosowano rozwiązując równania ruchu w opisie różnych nieliniowych zjawisk optycznych (np. [131, 88, 110] oraz artykuły tamże cytowane). W szczególności, metodę transformat Laplace’a wykorzystano w różnych wielofotonowych procesach ramanowskich (np. [88, 89, 94, 111, 112, 113, 117, 118]). Rozwiązanie równania ( 110) dla elementów diagonalnych  $\rho_{nm}(00\tau)$  zostało znalezione przez McNeila i Wallsa [88], a następnie podane w ogólniejszej postaci przez Simaana [89]. Niektórzy, m.in. Raymer and Walmsley ( [73] str. 192), uważają, że analiza Simaana [89] jest najpełniejszym i najściślejszym wykorzystaniem metody równania fundamentalnego do opisu rozpraszania ramanowskiego. Oczywiście informacja o fazie pól jest całkowicie stracona w rozwiązaniach Simaana. To ograniczenie spowodowało, że wielu autorów stosowało inne metody rozwiązywania równania fundamentalnego w opisie zjawiska ramanowskiego. Niemniej uwzględnienie fazowych własności ramanowskich pól rozproszonych najczęściej wiązało się z pominięciem kwantowej ewolucji pola pompującego – przynajmniej dla długich czasów ewolucji ( [24] i bibliografia tam zamieszczona). Wyprowadzimy rozwiązanie opisujące ewolucję wszystkich elementów macierzy gęstości  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau)$ , gdzie stopnie niediagonalności  $\nu$  i  $\mu$  są dowolne. O ile

nam wiadomo to jest pierwsze pełne rozwiązanie analityczne równań ruchu w modelu rozpraszania ramanowskiego z uwzględnieniem ewolucji pola pompującego. Nasze rozwiązanie w pełni broni się przed zarzutami Peřiny i in. (e.g. [24] str. 195) postawionymi wobec rozwiązań McNeila i Wallsa [88] oraz Simaana [89].

Jak zwykle przyjmujemy, że pola: stokesowskie i pompujące są wzajemnie niezależne w chwili początkowej  $\tau = \tau_0$ . Zatem, początkowy rozkład  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau_0)$  można przedstawić w postaci sfaktoryzowanej:

$$\rho_{nm}(\nu\mu\tau_0) = \rho_n^L(\nu\tau_0) \rho_m^S(\mu\tau_0). \quad (112)$$

Zdefiniujemy współczynnik  $\lambda$  jako funkcję entier  $\llbracket x \rrbracket$  (tj. część całkowitą liczby rzeczywistej  $\leq x$ ):

$$\lambda = \left\llbracket \frac{m-n+1}{2} + \frac{\mu-\nu}{4} \right\rrbracket. \quad (113)$$

Ścisłe rozwiązanie równania (110) przy początkowym warunku (112), wyprowadzone przez nas w uzupełnieniu **C**, ma następującą postać dla  $\lambda < 0$ :

$$\begin{aligned} \rho_{nm}(\nu\mu\tau) &= \left[ \frac{m!(m+\mu)!}{n!(n+\nu)!} \right]^{1/2} \sum_{l=0}^m \rho_{n+l}^L(\nu\tau_0) \rho_{m-l}^S(\mu\tau_0) \\ &\times \left[ \frac{(n+l)!(n+l+\nu)!}{(m-l)!(m-l+\mu)!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_{q=0}^l \exp[-f(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^l [f(p) - f(q)]^{-1}, \end{aligned} \quad (114)$$

natomiast dla  $\lambda \geq 0$  jest równe:

$$\begin{aligned} \rho_{nm}(\nu\mu\tau) &= \left[ \frac{m!(m+\mu)!}{n!(n+\nu)!} \right]^{1/2} \left\{ \sum_{l=0}^{\lambda} \rho_{n+l}^L(\nu\tau_0) \rho_{m-l}^S(\mu\tau_0) \right. \\ &\times \left[ \frac{(n+l)!(n+l+\nu)!}{(m-l)!(m-l+\mu)!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_{q=0}^l \exp[-f(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^l [f(p) - f(q)]^{-1} \\ &\left. + (1 - \delta_{m0}) \sum_{l=\lambda+1}^m \rho_{n+l}^L(\nu\tau_0) \rho_{m-l}^S(\mu\tau_0) \right\} \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{(n+l)!(n+l+\nu)!}{(m-l)!(m-l+\mu)!} \right]^{1/2} \\
& \times \sum_{q=0}^{\lambda} \sum_{q'=\lambda+1}^l \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{\lambda} [f(p) - f(q)]^{-1} \prod_{\substack{p'=\lambda+1 \\ p' \neq q'}}^l [f(p') - f(q')]^{-1} \\
& \times \left( \delta_{f(q)f(q')} \Delta\tau \exp[-f(q)\Delta\tau] \right. \\
& \left. + (\delta_{f(q)f(q')} - 1) \frac{\exp[-f(q)\Delta\tau] - \exp[-f(q')\Delta\tau]}{f(q) - f(q')} \right) \Big\},
\end{aligned}$$

gdzie funkcja  $f(x)$  dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2}[(n+x)(m-x+1) + (n+x+\nu)(m-x+\mu+1)]. \quad (116)$$

Zamiast współczynnika  $\lambda$  (113) można posłużyć się wielkością zdefiniowaną następująco

$$\lambda \mapsto \lambda_1 = \left\lceil \left\lfloor \frac{m-n}{2} + \frac{\mu-\nu}{4} \right\rfloor \right\rceil. \quad (117)$$

Rozwiązania (114) i (115), jeśli konsekwentnie stosować definicję  $\lambda_1$  (117), redukują się do rozwiązań Simaana (45) i (49) wyprowadzonych w artykule [89] dla elementów diagonalnych macierzy gęstości (tj.  $\nu = \mu = 0$ ). McNeil i Walls również otrzymali szczególne rozwiązania równania (110) dla elementów diagonalnych macierzy  $\hat{\rho}$  (wzory (6.5), (6.6) i (4.14) w artykule [88]); jednak ich rozwiązania nie są równoważne wzorom Simaana i oczywiście nie są szczególnym przypadkiem naszych rozwiązań (114) i (115). Jak pokazał Simaan, autorzy pracy [88] popełnili błąd algebraiczny.

Równania (114) i (115) doskonale nadają się do analizy numerycznej, niemniej posiadają skomplikowaną postać. To rozwiązanie równania (110) może być zapisane w zwartej formie. Stosując metodę Malakyaana [118] znajdujemy:

$$\begin{aligned}
\rho_{nm}(\nu\mu\tau) &= \left[ \frac{m!(m+\mu)!}{n!(n+\nu)!} \right]^{1/2} \sum_{l=0}^m \rho_{n+l}^L(\nu\tau_0) \rho_{m-l}^S(\mu\tau_0) \\
&\times \left[ \frac{(n+l)!(n+l+\nu)!}{(m-l)!(m-l+\mu)!} \right]^{1/2} \\
&\times \hat{\mathcal{D}} \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q'_1, q'_2, \dots, q'_d}}^l \exp[-f(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q, q'_1, q'_2, \dots, q'_d}}^l [f(p) - f(q)]^{-1}.
\end{aligned} \quad (118)$$

Szczegóły wyprowadzenia przedstawiliśmy w uzupełnieniu **C**. Operator różniczkowy  $\hat{\mathcal{D}}$  rzędu  $d$  został zdefiniowany następująco

$$\hat{\mathcal{D}} = (-1)^d \prod_{r=1}^d \frac{\partial}{\partial f(q_r)}. \quad (119)$$

Rząd  $d$  operatora ( 119) jest równy liczbie par wzajemnie równych czynników w iloczynie występującym w równaniu ( 118):  $f(q_1) = f(q'_1)$ ,  $f(q_2) = f(q'_2)$ , ...,  $f(q_d) = f(q'_d)$ . Jeśli nie ma par o równych czynnikach, to operator  $\hat{\mathcal{D}}$  z definicji równa się jedności (zob. uzupełnienie **C**). Rozwiązania ( 114), ( 115) i ( 118) uważamy za jeden z głównych wyników dysertacji. To rozwiązanie opublikowaliśmy w pracy [64]. Omawiając model ramanowski w przybliżeniu parametrycznym (paragraf 3.1) omówiliśmy pokrótce rozpraszanie ramanowskie typu stokesowskiego (z pominięciem antystokesowskiego) i vice versa – rozpraszanie typu antystokesowskiego (bez uwzględnienia stokesowskiego). Dla kompletności rozważań w uzupełnieniu **D** przedstawiliśmy rozwiązanie równania fundamentalnego dla rozpraszania ramanowskiego typu antystokesowskiego.

Zakładamy, że stopień niediagonalności  $\mu$  jest nieujemny (w przeciwieństwie do  $\nu$ ). Niemniej ewolucja pełnej macierzy gęstości jest określona dzięki symetrii

$$\rho_{nm}^*(\nu\mu\tau) = \rho_{n+\nu, m+\mu}(-\nu, -\mu, \tau). \quad (120)$$

Zatem rozwiązania ( 114), ( 115), jak i ( 118), dają pełen opis wszystkich własności omawianych pól promieniowania.

Dwumodowa macierz gęstości o elementach  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau)$  umożliwia wyznaczenie jednomodowych macierzy o elementach  $\rho_m^S(\mu\tau)$  i  $\rho_m^L(\mu\tau)$ . Przykładowo, aby wyznaczyć macierz gęstości dla pola stokesowskiego, korzystamy z relacji:

$$\rho_m^S(\mu\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=-n}^{\infty} \rho_{nm}(\nu\mu\tau). \quad (121)$$

Analogicznie liczymy  $\rho_m^L(\mu\tau)$  dla wiązki laserowej z tym, że dla elementów  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau)$  o  $\mu < 0$  własność symetrii ( 120) musi być użyta. Wspomniane rozwiązania McNeila i Wallsa [88] odpowiadają (po uwzględnieniu poprawek Simaana) jednomodowemu rozkładowi ( 121) dla elementów diagonalnych.

W rozdziale 1 podaliśmy definicje wielomodowych  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  i  $s$ -sparametryzowanych funkcji charakterystycznych  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$  oraz przytoczyliśmy relacje między nimi dla dowolnego parametru  $s$ . Podaliśmy też zależności między funkcjami  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\})$  i  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\})$ , a macierzą gęstości  $\hat{\rho}(\{\hat{a}_k\})$ . W tym paragrafie rozważamy przypadek szczególny – pole dwumodowe, tj.  $(\{\alpha_k\}) = (\alpha_L, \alpha_{S,A})$ . W notacji (109), relacje (16) i (17) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \rho_{n,m}(\nu, \mu) &= \frac{1}{\pi^2} \int \mathcal{W}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_{S,A}) \\ &\times \langle n, m | \hat{T}^{(-s)}(\alpha_L, \alpha_{S,A}) | n + \nu, m + \mu \rangle d^2\alpha_L d^2\alpha_{S,A}, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_{S,A}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=-n}^{\infty} \sum_{\mu=-m}^{\infty} \rho_{n,m}^*(\nu, \mu) \\ &\times \langle n, m | \hat{T}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_{S,A}) | n + \nu, m + \mu \rangle \end{aligned} \quad (123)$$

oraz elementy macierzowe w reprezentacji fokowskiej dla pól dwumodowych wyrażają się poprzez elementy jednomodowe (19):

$$\begin{aligned} \langle n, m | \hat{T}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_{S,A}) | n + \nu, m + \mu \rangle &= \langle n | \hat{T}^{(s)}(\alpha_L) | n + \nu \rangle \\ &\times \langle m | \hat{T}^{(s)}(\alpha_{S,A}) | m + \mu \rangle. \end{aligned} \quad (124)$$

Powyższe równania pokazują równoważność dwóch pozornie różnych opisów zagadnienia rozpraszania ramanowskiego: z jednej strony, poprzez  $s$ -sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa wyznaczone z równania Fokkera-Plancka (w paragrafie 3.1), a z drugiej strony poprzez elementy macierzy gęstości w reprezentacji fokowskiej obliczone z równania fundamentalnego w tym paragrafie.

Rozwiązania (114), (115) i (118) upraszczają się do prostych wzorów w szczególnych przypadkach. Na przykład, (i) dla długich czasów ewolucji, gdy wiązka laserowa jest całkowicie osłabiona, lub (ii) gdy założymy, że wiązka pompująca jest o dużej intensywności. W §3.2.2 omówimy dokładnie ostatni z tych przypadków. Pełniejszą analizę przedstawiliśmy w [64].

Po dostatecznie długim czasie ewolucji, układ przechodzi do stanu stacjonarnego w wyniku całkowitego wyczerpania pola pompującego. Stacjonarne rozwiązanie łatwo



wyznaczyć z rozwiązań (114) i (115). Gdy  $\tau \rightarrow \infty$ , niezerowe elementy macierzowe  $\rho_{nm}(\nu\mu\infty)$  muszą spełniać warunek  $f(q) = 0$  narzucający z kolei zerowanie się  $q$ . Zatem wnosimy, że

$$\rho_{nm}(\nu\mu, \tau = \infty) = 0 \quad (125)$$

dla  $n$  i  $\nu \neq 0$  oraz dowolnych  $m$  i  $\mu$ . Wszystkie momenty liczby fotonów i operatora anihilacji dla pola laserowego asymptotycznie znikają:

$$\langle \hat{n}^p(\infty) \rangle = 0, \quad (126a)$$

$$\langle \hat{a}_L^p(\infty) \rangle = 0, \quad (126b)$$

gdy  $p$  jest większe od 0. Jeśli założyć, że początkowo nie ma fotonów stokesowskich to zachodzi  $\rho_n^S(0\infty) = \rho_n^L(0\tau_0)$  [89], co oznacza, że dowolne momenty liczby fotonów stokesowskich  $\langle f[\hat{n}(\infty)] \rangle$  dla  $\tau \rightarrow \infty$  są równe odpowiednim momentom liczby fotonów laserowych  $\langle f[\hat{n}(\tau_0)] \rangle$  w chwili początkowej  $\tau_0$ .

### 3.2.2 Opis w przybliżeniu parametrycznym

Pokażemy, że ścisłe rozwiązanie (114) redukuje się do prostego przybliżonego wyrażenia przy założeniu, że intensywność wiązki pompującej jest o wiele większa od intensywności pola stokesowskiego, tj. gdy  $\langle \hat{n} \rangle \gg \langle \hat{m} \rangle$ . Procesy osłabienia pola laserowego i wzmocnienia pola stokesowskiego ograniczają zakres ważności rozwiązania do krótkich czasów ewolucji  $\tau$  ( $\tau \ll 1$ ). Po zastosowaniu przybliżenia zauważamy, że elementy macierzowe  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau)$  dla  $\lambda \geq 0$  określone przez (115) można pominąć. A ponadto, rozwiązanie (114) dla  $\lambda < 0$  upraszcza się, jeśli tylko przyjąć, że  $n \approx n \pm m$ . W analizie własności opisanych przez elementy macierzowe  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau)$  o małym stopniu niediagonalności  $\nu$  (takich jak ścieśnianie kwadraturowych operatorów pola), możemy skorzystać z uproszczenia  $n \approx n + \nu$ . W sytuacji, gdy chcemy określić własności fazowe [132, 60, 133] (co wymaga sumowania elementów macierzowych po  $\nu$  od 0 do nieskończoności) można założyć, że fluktuacje pola laserowego są małe w porównaniu do ich średniej wartości, tj.  $\langle \hat{n} \rangle \gg \sqrt{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle}$ . Przy tych założeniach rozwiązanie

równania fundamentalnego ( 110) jest równe:

$$\begin{aligned} \rho_{nm}(\nu\mu\tau) &\approx [m!(m+\mu)!]^{1/2} \\ &\times \sum_{l=0}^m \rho_n^L(\nu\tau_0)\rho_{m-l}^S(\mu\tau_0)[(m-l)!(m-l+\mu)!]^{-1/2} \\ &\times \sum_{q=0}^l \exp[-n(m-q+1+\mu/2)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^l (q-p)^{-1}. \end{aligned} \quad (127)$$

Po zastosowaniu wzoru rozwinięcia dwumianowego otrzymujemy rozwiązanie ( 127) w prostszej postaci

$$\begin{aligned} \rho_{nm}(\nu\mu\tau) &\approx \sum_{l=0}^m \left[ \binom{m}{l} \binom{m+\mu}{l} \right]^{1/2} (e^{n\Delta\tau} - 1)^l \\ &\times \exp[-n(m+1+\mu/2)\Delta\tau] \rho_n^L(\nu\tau_0)\rho_{m-l}^S(\mu\tau_0), \end{aligned} \quad (128)$$

Zauważmy, że w szczególnym przypadku, gdy  $\mu = 0$  i  $\nu = 0$ , nasze rozwiązanie ( 128) przechodzi w rozwiązanie Simaana [89]. Macierz gęstości ( 127), na mocy związków ( 243)–( 248), umożliwia wyznaczenie wartości oczekiwanych i wariancji dla pól stokesowskiego i laserowego. Jednak w ostatnim przypadku stwierdzamy brak zależności czasowej dowolnych momentów liczby fotonów  $\langle f[\hat{n}(\tau)] \rangle$  przy założeniu, że pole stokesowskie jest początkowo w stanie fokowskim:

$$\begin{aligned} \langle f[\hat{n}(\tau)] \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\rho_n^L(0\tau_0) \exp[-n(m_0+1)] \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+m_0}{m_0} (1-e^{-n\tau})^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\rho_n^L(0\tau_0) = \langle f(\hat{n}) \rangle. \end{aligned} \quad (129)$$

Wynik ( 129) jest słuszny dla pola stokesowskiego w dowolnym stanie fokowskim, zatem wnioskujemy, że wiązka pompująca nie zmienia się w czasie niezależnie od początkowej statystyki pola stokesowskiego. Po wstawieniu rozwiązania ( 128) z  $\nu = \mu = 0$  do relacji typu ( 121)  $\rho_m^L(0\tau)$  otrzymuje się rozwiązanie w formie

$$\rho_m^S(0\tau) = \sum_{n_0=0}^{\infty} \rho_m^{(n_0)}(\tau)\rho_{n_0}^L(0\tau_0), \quad (130)$$

gdzie funkcja  $\rho_m^{(n_0)}(\tau)$  dla początkowego stanu fokowskiego  $|n_0\rangle$  wiązki laserowej wynosi:

$$\rho_m^{(n_0)}(\tau) = \exp[-(m+1)n_0\Delta\tau]$$

$$\times \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (e^{n_0 \Delta \tau} - 1)^l \rho_{m-l}^S(0\tau_0). \quad (131)$$

Przy dodatkowym założeniu, że pole stokesowskie jest w stanie koherentnym  $|\alpha\rangle$  w chwili  $\tau_0$ , wyrażenie (131) można zsumować. Otrzymujemy wówczas rozwiązanie

$$\begin{aligned} \rho_m^{(n_0)}(\tau) &= \exp[-|\alpha|^2 - n_0 \Delta \tau] (1 - e^{-n_0 \Delta \tau})^m \\ &\times {}_1F_1 \left[ -m; 1; -|\alpha|^2 (e^{n_0 \Delta \tau} - 1)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (132)$$

gdzie  ${}_1F_1$  jest funkcją Kumera (zdegenerowaną funkcją hipergeometryczną) [134]. Elementy macierzowe  $\rho_m^{(n_0)}(\tau_0)$  (132) opisują superpozycję pól koherentnego i chaotycznego [24, 135]. Stanie się to bardziej widoczne, gdy rozwiązanie (132) zapiszemy stosując notację dla średniej liczby stokesowskich fotonów chaotycznych

$$\langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle = \exp(n_0 \Delta \tau) - 1, \quad (133)$$

i dla średniej liczby fotonów koherentnych

$$\langle \hat{m}_c(\tau) \rangle = |\alpha|^2 \exp(n_0 \Delta \tau). \quad (134)$$

Wówczas, gdy skorzystamy z definicji wielomianów Laguerre'a  $L_m$ , rozkład (132) przyjmie standardową postać [136, 137, 89, 24]:

$$\begin{aligned} \rho_m^{(n_0)}(\tau) &= \frac{\langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle^m}{(1 + \langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle)^{1+m}} \exp \left( -\frac{\langle \hat{m}_c(\tau) \rangle}{1 + \langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle} \right) \\ &\times L_m \left( -\frac{\langle \hat{m}_c(\tau) \rangle}{\langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle (1 + \langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle)} \right). \end{aligned} \quad (135)$$

Dla pola stokesowskiego znajdującego się początkowo w stanie próżni  $|0\rangle$ , rozwiązania (132) i (135) redukują się do rozkładu Bosego-Einsteina

$$\rho_m^{(n_0)}(\tau) = \frac{\langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle^m}{(1 + \langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle)^{1+m}}, \quad (136)$$

opisującego pole chaotyczne (por. równanie (74)). Głębszą analizę powyższych rozwiązań przedstawimy w §4.2.2.

## 4 Rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa w opisie kwantowych własności pól optycznych

W tym rozdziale omówimy kwantowe własności promieniowania na przykładzie modelu oscylatora anharmonicznego (ścieśnianie oraz stany superpozycji) i modelu rozpraszania ramanowskiego (ścieśnianie i statystyka sub/superpoissonwska).

Do istotnych zagadnień optyki kwantowej należy analiza zjawisk o sub- i superpoissonowskiej statystyce liczby fotonów, efektów rozgrupowania fotonów oraz analiza ścieśniania światła. Literatura poświęcona tej tematyce jest wyjątkowo obszerna. Wymieńmy jedynie artykuły Cavesa i Schumaker [138, 139], Kielicha, Kozierowskiego i Tanasia [140], Leuchsa [141], Loudona i Knighta [29], Wódkiewicza [142], Teicha i Saleha [143, 42], Zaheera i Zubairy’ego [43], Grochmalickiego i Lewensteina [144], Gardinera [22], a także specjalne wydania dwu renomowanych czasopism [145, 146]. Liczne eksperymenty [147]– [156] potwierdziły możliwość generacji stanów ścieśnionych w różnych nieliniowych procesach optycznych. Wielokrotnie także obserwowano [157]– [164] stany subpoissonowskie.

Subpoissonowska statystyka liczby fotonów i/lub antykorelacje (w szczególności rozgrupowanie) fotonów były analizowane w różnych modelach rozpraszania ramanowskiego. Te zjawiska studiowali m.in.: Loudon [110], Simaan [89], Agarwal i Jha [165], Trung i Schütte [166], Szlachetka i Kielich [167], Szlachetka i in. [105, 168], Gupta i Mohanty [112, 113], Peřina i in. [91, 92], Tänzler i Schütte [169], Germey i in. [93], Mohanty i in. [114], Král [170], Gupta i Dash [115, 94], Ritsch i in. [171] oraz Miranowicz i Kielich [64].

Ścieśnianie pól ramanowskich badali Peřina i in. ([98], [172]– [175]), Kárská i Peřina [97], Levenson i in. [106] oraz Miranowicz i Kielich [64].

Ścieśnienia światła w modelu oscylatora anharmonicznego analizowali: Tanaś i Kielich [51, 52], Tanaś [176, 53], Milburn [61], Kitagawa i Yamamoto [55], Gerry i Rodrigues [177], Gerry i Vrscaj [178], Daniel i Milburn [179], Bužek [180], Peřinová i Lukš [181, 182], Peřina i in. [183], Peřinová i in. [184], Gerry [185, 186], Tanaś, Miranowicz i Kielich [25] oraz Mihalache i Baboiu [187].

Białynicka-Birula [56] pokazała, że podczas ewolucji stanów koherentnych Titulaera-Glaubera pojawiają się kwantowe superpozycje stanów rozróżnialnych makroskopowo. Pewne własności tych stanów określił Stoler [57]. Po latach ponownie wzrosło zainteresowanie superpozycjami stanów. Badaniem generacji takich stanów w modelu oscylatora anharmonicznego zajmowali się Yurke i Stoler [58], Meozzi i Tombesi [188, 59], Kennedy i Drummond [189], Milburn i in. [61, 190], Daniel i Milburn [179], Sanders [191, 192], Vourdas i Bishop [193], Averbukh i Perelman [194, 195] Miranowicz, Tanaś i Kielich [54], Tanaś i in. [60], Gantsog i Tanaś [196, 197, 198], Werner i Risken [199], Paprzycka i Tanaś [200], Bużek i in. [201], Brisudová [202], Wielinga i Sanders [203], Tara, Agarwal i Chaturvedi [204] oraz Gerry i Grobe [205]. Analizę ściśniętych stanów superpozycji przedstawili m. in. Tombesi i Meozzi [59], Wódkiewicz i in. [206] oraz Orłowski i in. [207].

## 4.1 Dyskretne superpozycje stanów koherentnych

W tym paragrafie przedstawimy ewolucję stanów koherentnych Titulaera-Glaubera prowadzącą do powstania kwantowych superpozycji stanów rozróżnialnych makroskopowo, tzw. kotów schrödingerowskich <sup>20</sup> i kociąt schrödingerowskich <sup>21</sup>. Najwięcej uwagi poświęcimy propagacji światła w nieliniowym ośrodku kerrowskim modelowanym jako dwufotonowy oscylator anharmoniczny. Część przedstawionych tu wyników opublikowaliśmy w dwu artykułach [54, 60], gdzie m. in. ukazaliśmy możliwość powstania nieparzystej superpozycji stanów, podaliśmy jawną analityczną postać superpozycji kilku stanów, porównaliśmy superpozycje stanów w dwu modelach oscylatora anharmonicznego oraz wyznaczyliśmy skończone sumy trygonometryczne określające współczynniki superpozycji.

Averbukh i Perelman [194, 195] <sup>22</sup> rozważyli problem ewolucji pakietów falowych tworzonych przez wysoce wzbudzone układy kwantowe, pokazując możliwość części-

---

<sup>20</sup>ang. Schrödinger cat/catlike states [208]

<sup>21</sup>ang. [Schrödinger] kitten states [209]

<sup>22</sup>Wyniki zawarte w [194, 195] oraz nasze rezultaty [54] zostały równocześnie przedstawione na konferencji „Quantum Optics II” w Ustroniu w wrześniu 1989

wych odrodzeń początkowego pakietu falowego. Ich analiza zasadniczo prowadzi do rozważanego w dysertacji modelu oscylatora anharmonicznego. Autorzy pokazali, że współczynniki superpozycji mogą być wyznaczone *explicite*. Podejście Averbukha i Perelmana zaadaptowaliśmy w pracy [60]. W tym paragrafie przedstawimy podejście macierzowe do zagadnienia reprezentacji stanów koherentnych Titulaera-Glaubera w postaci superpozycji stanów koherentnych. Formalne rozwiązanie układu równań Białynickiej-Biruli [56] bezpośrednio prowadzi nas do sum trygonometrycznych opisujących współczynniki superpozycji. Istotnym wynikiem niniejszej dysertacji jest znalezienie zwartych analitycznie wzorów na współczynniki superpozycji.

We wzorze (41) definiującym uogólnione stany koherentne Titulaera-Glaubera występują czynniki fazowe  $\theta_n$ . Dla dwufotonowego modelu oscylatora anharmonicznego są równe

$$\theta_n = \begin{cases} \theta_n^{(n)} = \frac{\tau}{2}n(n-1) & \text{dla } H_I^{(n)} = \frac{1}{2}\hbar\kappa\tau\hat{a}^{+2}\hat{a}^2 \\ \theta_n^{(sq)} = \frac{\tau}{2}n^2 & \text{dla } H_I^{(sq)} = \frac{1}{2}\hbar\kappa(\hat{a}^+\hat{a})^2 \end{cases}, \quad (137)$$

gdzie obok  $\theta_n^{(n)}$  dla hamiltonianu (33c) w postaci normalnej, podaliśmy fazę  $\theta_n^{(sq)}$  dla hamiltonianu „kwadratowego”. Te dwa hamiltoniany oddziaływania różnią się od siebie o człon postaci  $\frac{1}{2}\hbar\kappa\hat{a}^+\hat{a}$ , który może być dołączony do hamiltonianu swobodnego  $H_0$  (33b) poprzez odpowiednią zmianę częstości oscylatora. To dodatkowe przesunięcie fazy może mieć pewne znaczenie w zjawiskach czułych na fazę (np. w ścieśnianiu światła [53]), szczególnie w przypadku stosowania detekcji homodynowej, gdzie częstość oscylatora lokalnego jest w istocie częstością swobodnych oscylacji. Porównanie możliwości ścieśniania światła w tych modelach oscylatora anharmonicznego przedstawił Tanaś [53]. Związek między superpozycjami stanów koherentnych w modelach opisanych hamiltonianami  $H_I^{(sq)}$  i  $H_I^{(n)}$  analizowaliśmy w artykule [54]. Sumy trygonometryczne opisujące współczynniki superpozycji  $c_k$  podamy dla dowolnych stanów koherentnych Titulaera-Glaubera (w szczególności stanów oscylatorów anharmonicznych  $H_I^{(sq)}$  i  $H_I^{(n)}$ ). Zwarte analitycznie wzory określające  $c_k$  (dla dowolnych  $k$  i  $N$ ) oraz kilka przykładów superpozycji stanów koherentnych dla  $N=1,2,3,4,6$  podamy wyłącznie dla „kwadratowego” hamiltonianu  $H_I^{(s)}$ . Taki wybór modelu umożliwi bezpośrednie

porównanie naszych wyników z wzorami przedstawionymi przez innych autorów, m. in.: Stolera [57], Yurke'go i Stolera [58], Tombesi'ego i Mecozi'ego [59], Milburna i in. [61, 190, 179], Sandersa [191], Averbukha i Perelmana [194, 195] Bużka i in. [201]. Oczywiście przejście do odpowiadających wzorów dla modelu  $H_I^{(n)}$  jest trywialne dzięki relacjom (190) i (191). Do tego zagadnienia powrócimy w tym paragrafie.

Białynicka-Birula [56] pokazała, że przy określonym warunku okresowości, stany koherentne Titulaera-Glaubera (41) mogą być przedstawione w postaci dyskretnej superpozycji stanów koherentnych. Ogólnie mówiąc, jeśli czynniki fazowe  $\theta_n$  spełniają warunek periodyczności dla pewnej liczby naturalnej  $N$ :

$$\exists_N \forall_n \exp(i\theta_{n+N}) = \exp(i\theta_n), \quad (138)$$

to stan (41) może być przedstawiony w postaci dyskretnej superpozycji  $N$  stanów koherentnych [56]

$$|\alpha_0, \tau = M/NT\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} c_k |\exp(i\phi_k)\alpha_0\rangle \equiv \sum_{k=1}^N c_k |\exp(i\phi_k)\alpha_0\rangle \quad (139)$$

Problem sprowadza się do określenia faz  $\phi_k$  i współczynników  $c_k$ . Przy odpowiednim wyborze chwili (drogi) ewolucji

$$\tau = \frac{M}{N}T = 4\pi \frac{M}{N}, \quad (140)$$

warunek periodyczności (138) jest spełniony i superpozycja (139) może być bezpośrednio wyznaczona ze wzoru

$$\phi_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (141)$$

natomiast współczynniki  $c_k$  należy wyznaczyć z układu  $N$  liniowych niejednorodnych równań z niezerowym wyznacznikiem. Zapiszemy ten układ w postaci macierzowej

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (142)$$

gdzie

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{N-1} \\ 1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_{N-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_1^{N-1} & \dots & \lambda_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (143a)$$

$$\mathbf{b} = [\exp(i\theta_0), \exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_{N-1})]^T, \quad (143b)$$

$$\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T. \quad (143c)$$

Warunki normalizacji mają postać:

$$|\mathbf{c}| = 1, \quad (144a)$$

$$|\mathbf{b}| = N. \quad (144b)$$

Dla prostoty wprowadziliśmy oznaczenie

$$\lambda_k \equiv e^{i\phi_k}. \quad (145)$$

W porównaniu do układu równań zamieszczonego w pracy Białynickiej-Biruli [56], zmieniliśmy numerację  $c_1, \dots, c_N$  na  $c_0, \dots, c_{N-1}$ . Układ równań (142) rozwiązaliśmy w kilku szczególnych przypadkach (dla  $N = 1, 2, 3, 4$ ) w pracy [54]. Averbukh i Perelman podali ogólne rozwiązanie analogicznego układu równań [194, 195]. Ich metodę zaadaptowaliśmy w artykule [60]. Przedstawimy teraz podejście macierzowe do problemu. Znajdziemy ogólne rozwiązanie układu (142) dla dowolnego  $N$  stosując twierdzenie Kroneckera-Capelliego. Korzystając z (145), macierz  $\mathbf{A}$  można zapisać w postaci symetrycznej:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda^{N-1} \\ 1 & \lambda^2 & \dots & \lambda^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda^{N-1} & \dots & \lambda^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (146)$$



dla której macierz odwrotna ma postać

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{A}^* \quad (147)$$

Ostateczny wzór na współczynniki superpozycji  $c_k$ , po podstawieniu do

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad (148)$$

ma postać

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(i\theta_l) \lambda_k^{*l} \\ &= \frac{1}{N} \sum_l \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} (M f_l - lk) \right], \end{aligned} \quad (149)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$f_l = \begin{cases} f_l^{(n)} = l(l-1) \\ f_l^{(sq)} = l^2 \end{cases}. \quad (150)$$

Uogólnienie rozwiązania (149) na przypadek ewolucji pola w modelu  $m$ -fotonowego ( $m > 2$ ) oscylatora anharmonicznego sprowadza się do zastąpienia czynników fazowych  $\theta_n$  (137) i  $f_l$  (150) przez:

$$f_l = 2/\tau \theta_l = \begin{cases} f_l^{(n)} = l^{[m]} \equiv l(l-1) \cdots (l-m+1) & \text{dla } H_I^{(n)} \sim \hat{a}^{+m} \hat{a}^m \\ f_l^{(sq)} = l^m & \text{dla } H_I^{(sq)} \sim (\hat{a}^+ \hat{a})^m \end{cases}. \quad (151)$$

Pełną analizę dyskretnych superpozycji stanów koherentnych w takim modelu oscylatora anharmonicznego przedstawili Paprzycka i Tanaś [200].

Skończone sumy trygonometryczne określające współczynniki superpozycji  $c_k$  (149) są rozwiązaniem układu równań (142). Jednak nasuwa się pytanie, czy nie można sumy (149) przedstawić w zwartej postaci analitycznej? Zastanówmy się wpieryw nad zagadnieniem uproszczenia wyjściowego układu równań. Ograniczymy nasze rozważania wyłącznie do wersji „kwadratowej”  $H_I^{(sq)}$  modelu oscylatora anharmonicznego i dla przejrzystości zapisu pominiemy górny wskaźnik ( $sq$ ). Relacje (190) i (191) umożliwią zapisanie naszych wzorów dla „normalnej” wersji modelu.

Rozważmy symetrię układu równań (142) i rozwiązań (149) w trzech przypadkach: (i)  $N=1 \pmod{2}$ ; (ii)  $N=2 \pmod{4}$ ; oraz (iii)  $N=0 \pmod{4}$ . Wszędzie zakładamy, że  $M$  i  $N$  są wzajemnie pierwsze. W przeciwnym razie,  $M$  i  $N$  należy zastąpić przez  $M' = M/\mu$  i  $N' = n/\mu$ , gdzie  $\mu$  jest największym wspólnym dzielnikiem.

(i) Gdy  $N$  jest nieparzyste układ równań (142) ma postać ( $c_0 \equiv c_N$ ):

$$\sum_{k=1}^N c_k \exp(in\phi_k) = \exp(i\theta_n) = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}f_n\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (152)$$

gdzie fazy  $\phi_k$  zdefiniowano wzorem (141). Przy odpowiednim wyborze czasu (drogi) ewolucji, zauważamy dodatkową symetrię umożliwiającą nam zmniejszenie liczby równań (142) koniecznej do wyznaczenia wszystkich współczynników  $c_k$ . Korzystając z relacji

$$\exp(i\theta_{N-n}) = \exp(i\theta_n), \quad (153)$$

zauważamy, że zachodzi

$$c_{N-k} = c_k, \quad (154)$$

co oznacza, że liczbę równań można zredukować do  $\frac{1}{2}(N-1) + 1$ . Dla nieparzystego  $N$  otrzymujemy superpozycję  $N$  stanów koherentnych o amplitudach spełniających warunek  $|\alpha_k| = |\alpha_0|$ .

Gdy  $N$  jest liczbą parzystą, zachodzą następujące relacje:

$$\exp(i\theta_{n+N/2}) = (-1)^{N/2} \exp(i\theta_n), \quad (155)$$

$$\exp(i\theta_{N/2-n}) = (-1)^{N/2} \exp(i\theta_n). \quad (156)$$

Podstawmy wzór (155) do (152). Staje się wówczas jasne, że dla parzystych (albo nieparzystych)  $N/2$  znikają współczynniki  $c_k$  o nieparzystych (albo parzystych) wskaźnikach  $k$ . Ta symetria pozwala zredukować liczbę równań (142) o połowę. Zamiast  $N$  równań w ogólnym przypadku, wystarcza jedynie  $N/2$  równań, co oczywiście odpowiada superpozycji tylko  $N/2$  stanów koherentnych. Otrzymujemy:

(ii) Dla  $N = 2 \pmod{4}$  mamy

$$\phi_k = 2\pi(2k+1)/N \quad k = 0, 2, \dots, N/2 - 1, \quad (157)$$

$$\sum_{k=0}^{N/2-1} c_{2k+1} \exp(in\phi_k) = \exp(i\theta_n) \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \quad (158)$$

Jeśli skorzystać z (156), to łatwo zauważyć następującą relację między współczynnikami

$$c_{N-(2k+1)} = c_{2k+1}, \quad (159)$$

co redukuje liczbę równań do  $[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}N - 1) + 1]$ .

(iii) Dla  $N = 0 \pmod{4}$  zachodzi

$$\phi_k = 2\pi(2k/N) \quad k = 0, 2, \dots, N/2 - 1, \quad (160)$$

$$\sum_{k=0}^{N/2-1} c_{2k} \exp(in\phi_k) = \exp(i\theta_n) \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \quad (161)$$

Po raz kolejną relacją (156) prowadzi do zależności

$$c_{N-2k} = c_{2k}, \quad (162)$$

co pozwala zmniejszyć liczbę równań do  $(\frac{1}{4}N + 1)$ .

Oczywiście, współczynniki  $c_{2k-1}$  i  $c_{2k}$  można inaczej ponumerować. Jednak zachowamy powyższą notację w celu zaznaczenia symetrii współczynników superpozycji.

Powyższe wnioski, dotyczące układu równań (142), odgrywają zasadniczą rolę przy analizowaniu zagadnienia dyskretnych superpozycji stanów. Jak również widać ze wzorów (141) i (157), superpozycje powiedzmy trzech stanów pojawiają się zarówno dla  $N = 3$ , jak i  $N = 6$ . To są jednak różne stany. Z porównania związków (141) i (157) wynika, że fazy tych dwu superpozycji różnią się o  $\pi/3$ , co oznacza wzajemną symetrię względem osi  $\text{Im}\alpha$ .

Liczba składników superpozycji zależy od ułamka okresu ewolucji. Jeśli ułamek okresu jest równy  $M/N$  (przy założeniu, że  $M$  i  $N$  są wzajemnie pierwsze), liczba składników wynosi  $N$  dla  $N$  nieparzystego oraz  $N/2$  dla  $N$  parzystego. Jak już wspomniano,

gdy ułamek  $M/N$  można uprościć, to powyższe reguły należy zastosować do ułamka zredukowanego. Inne własności symetrii współczynników  $c_k$  też można wydedukować z układu równań (142) i/lub z rozwiązań (149). Dla jednoznaczności zapisu wprowadźmy explicite argumenty współczynników  $c_k(M, N)$  określające moment  $\tau = \frac{M}{N}T$ . Otrzymaliśmy następujące ogólne relacje opisujące proces tworzenia się dyskretnych superpozycji stanów koherentnych podczas ewolucji oscylatora anharmonicznego:

$$c_k(M, N) = c_{N-k}(M, N) \quad (163)$$

$$c_k(M, N) = c_k^*(N - M, N) \quad (164)$$

$$c_k(M, N) = c_{\kappa k}(\kappa M, \kappa N) \quad (165)$$

$$c_k(M, N) = c_{N \pm 2k}^*(N - 2M, 2N) \quad (166)$$

$$c_k((N - 1)/2, N) = c_{N \pm 2k}^*(1, 2N), \quad (167)$$

$$c_k(M, N_p) = \left(\frac{M}{N_p}\right) c_0(1, N_p), \quad (168)$$

gdzie wprowadziliśmy symbol Legendre'a

$$\left(\frac{M}{N}\right) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \exists_m M = m^2 \pmod{N} \\ -1 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (169)$$

oraz

$$\begin{aligned} c_k(M, N) &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \exp(i2\pi l^2 M/N) \exp\left[-i2\pi M/N \left(\frac{k}{2M}\right)^2\right] \\ &= c_0(M, N) \exp\left[-i2\pi M/N \left(\frac{k}{2M}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (170)$$

jeśli jest spełniony warunek  $2M \ll k/(2M) = k$ .

Na mocy relacji (163)–(170) można m. in. wyznaczyć  $c_k(M, N)$  znając jedynie współczynniki  $c_k(M = 1, N)$ . Zauważamy również, że dla względnie pierwszych liczb całkowitych  $M$  i  $N$ , moduł  $|c_k|$  może przyjąć jedną z trzech wartości:

$$|c_k(M, N)|, |c_0(1, N)| \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}}, \sqrt{\frac{2}{N}}, 0 \right\}. \quad (171)$$

W celu wyliczenia sum trygonometrycznych (149) (dla  $f(l) = l^2$ ) skorzystajmy z własności (163)–(165), a także następujących związków:

$$\begin{aligned} \delta_{k \pmod{2},0} \delta_{N \pmod{4},0} + \delta_{k \pmod{2},1} \delta_{N \pmod{4},2} &\equiv \delta_{k,even} \delta_{N/2,even} + \delta_{k,odd} \delta_{N/2,odd} \\ &= \delta_{N/2,k \pmod{2}} \end{aligned} \quad (172)$$

oraz [210]:

$$\sum_{l=1}^N \exp [i2\pi f(al + b) M/N] = \sum_{l=1}^N \exp [i2\pi f(l) M/N], \quad (173)$$

gdzie  $b$  jest liczbą całkowitą i  $(a, N) = 1$ . Po dość żmudnych obliczeniach otrzymujemy dla nieparzystych  $N$ :

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left\{ i \frac{\pi}{8} (N-1)^2 - i \frac{\pi}{2N} (N \delta_{1,k \pmod{2}} - k)^2 \right\} \quad (174)$$

oraz dla parzystych  $N$ :

$$c_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \exp \left\{ i \frac{\pi}{4N} (N - 2k^2) \right\} \delta_{N/2,k \pmod{2}}. \quad (175)$$

Analitycznie zwarte wzory (174)–(175), opisujące współczynniki superpozycji stanów koherentnych powstających podczas ewolucji oscylatora anharmonicznego (z normalnie uporządkowanym hamiltonianem) są rozwiązaniem problemu postawionego przez Sandersa [192]. Podobne rozwiązanie, niezależnie od nas, znaleźli Paprzycka i Tanaś [200]. Analitycznie zwarte relacje dla superpozycji w  $m$ -fotonowym oscylatorze anharmonicznym (gdy  $m > 2$ ) jest problemem o wiele trudniejszym i nie rozwiązany nawet w szczególnym przypadku, gdy  $k = 0$  i  $M = 1$  (vide monografia Korobova [210]).

Zauważmy, że dla  $k = 0$ , sumy trygonometryczne (149) przy  $f(l) = l^2$  redukują się do sum Gaussa, zatem wzory (174) i (138) można zapisać w postaci (vide e.g. [210]):

$$c_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} i^{(N-1)^2/4} & \text{jeśli } N = 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} (1 + i) & \text{jeśli } N = 0 \pmod{4} \\ 0 & \text{jeśli } N = 2 \pmod{4} \end{cases} \quad (176)$$

Dobrymi reprezentacjami superpozycji stanów są sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$ . Aby wyznaczyć te rozkłady można skorzystać z naszych wzorów (42) lub (45) podanych w paragrafie 2.2 dla oscylatora anharmonicznego w dowolnej chwili  $\tau$ . W szczególności dla funkcji  $Q$  można posłużyć się uproszczonymi wzorami (43) lub (46). Powyższe związki umożliwiają numeryczne wyznaczenie rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  (przy  $s < 1$ ). Jednak z punktu widzenia interpretacji dogodnie jest znaleźć inną postać rozkładów (42) i (45) oraz (43) i (46) w chwili  $\tau = M/NT$ . Zależności powinny uwzględniać fakt, że stan koherentny Titulaera-Glaubera jest dyskretną superpozycją glauberowskich stanów koherentnych (139). Rozkład  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  rozdzieliliśmy na sumę niezaburzonych funkcji gaussowskich oraz sumę opisującą człony interferencyjne:

$$\mathcal{W}^{(s)}(\alpha) = \mathcal{W}_0^{(s)}(\alpha) + \mathcal{W}_{int}^{(s)}(\alpha), \quad (177)$$

gdzie

$$\mathcal{W}_0^{(s)}(\alpha, M/NT) = \frac{2}{1-s} \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \exp \left\{ -\frac{2}{1-s} |\alpha - e^{i\phi_k} \alpha_0|^2 \right\}, \quad (178)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{int}^{(s)}(\alpha, M/NT) &= \frac{2}{1-s} \sum_{\substack{k,l=0 \\ k \neq l}}^{N-1} |c_k| |c_l| \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{1-s} \left( |\alpha - e^{i\phi_k} \alpha_0|^2 + |\alpha - e^{i\phi_l} \alpha_0|^2 \right) \right\} \\ &\times \cos \left\{ \gamma_k - \gamma_l + \frac{1+s}{1-s} |\alpha_0|^2 \sin(\phi_k - \phi_l) \right. \\ &\left. + \frac{4}{1-s} |\alpha| |\alpha_0| \cos \left( \frac{\phi_k + \phi_l}{2} + \theta_0 - \theta \right) \sin \left( \frac{\phi_k - \phi_l}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (179)$$

We wzorze (179) stosowaliśmy notację:

$$c_k = |c_k| \exp(i\gamma_k), \quad (180a)$$

$$\alpha = |\alpha| \exp(i\theta), \quad \alpha_0 = |\alpha_0| \exp(i\theta_0). \quad (180b)$$

W szczególnym przypadku, dla funkcji  $Q$  ( $s = -1$ ) wzory (178)–(179) upraszczają się odpowiednio do:

$$\mathcal{W}_0^{(-1)}(\alpha, \tau) = \sum_k |c_k|^2 \exp \left\{ -|\alpha - e^{i\phi_k} \alpha_0|^2 \right\}, \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{int}^{(-1)}(\alpha, \tau) &= 2 \sum_{\substack{k,l \\ k>l}} |c_k| |c_l| \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha - e^{i\phi_k} \alpha_0|^2 - \frac{1}{2} |\alpha - e^{i\phi_l} \alpha_0|^2 \right\} \\ &\times \cos \left\{ \gamma_k - \gamma_l + 2|\alpha| |\alpha_0| \cos \left( \frac{\phi_k + \phi_l}{2} + \theta_0 - \theta \right) \sin \left( \frac{\phi_k - \phi_l}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (182)$$

W wyprowadzeniu wzorów (177)–(182) skorzystaliśmy z (139). W członach interferencyjnych  $\mathcal{W}_{int}^{(s)}$  (179) i (182) pojawiają się liczne maksima na skutek oscylacji funkcji cosinus. Czynniki wykładnicze w (179) i (182) zmniejsza amplitudy tych wierzchołków szczególnie wtedy, gdy stany  $k$  i  $l$  są dobrze rozdzielone. Termin „dobrze rozdzielony” użyliśmy w znaczeniu ( $|\alpha|^2 [\exp(i\phi_k) - \exp(i\phi_l)] \gg 1$ ). W dalszej części tego paragrafu przedstawimy jeszcze jedno kryterium dobrego rozdzielania stanów superpozycji. W rozkładzie  $\mathcal{W}_{int}^{(-1)}(\alpha, \frac{M}{N}T)$  (182) nie występuje wyrażenie proporcjonalne do  $|\alpha_0|^2$  co powoduje, że wpływ członów interferencyjnych w funkcji  $Q$  jest najmniejszy w porównaniu do pozostałych  $s$ -sparametryzowanych rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \frac{M}{n}T)$ . Na przykład, człony interferencyjne funkcji Wignera  $\mathcal{W}_{int}^{(0)}(\alpha, T/4)$  dla superpozycji dwu stanów o  $\alpha_0 = 2$ , mają amplitudy o wiele większe niż właściwe wierzchołki gaussowskie opisane przez  $\mathcal{W}_0^{(0)}(\alpha, T/4)$ . Przy większym  $\alpha_0$ , struktura o dwu wierzchołkach staje się bardziej widoczna. Z uwagi na małą czytelność wykresów funkcji Wignera dla superpozycji stanów o małym  $\alpha_0$ , zdecydowaliśmy się wyłącznie na wykresy funkcji  $Q$  (rys. 2–5).

Analizując wzory (178)–(179), lub (181)–(182) łatwo zauważyć, że maksima rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa pojawiają się dla  $\theta = \theta_0 + \phi_k$ . Pokażemy dla superpozycji stanów koherentnych, że sparametryzowane rozkłady fazowe (vide rozdział 7), jak również rozkłady fazowe Pegga-Barnetta (§7.2) osiągają maksima także dla  $\theta = \theta_0 + \phi_k$ . To oznacza, że dla dobrze rozdzielonych stanów (tj. gdy można zaniedbać człony interferencyjne) powyższe rozkłady mają tę samą symetrię rotacyjną.

Wszystkie przykłady przedstawione na wykresach wyznaczyliśmy numerycznie korzystając ze wzorów (182) lub (46). W pozostałych rozdziałach dysertacji przedstawiliśmy wykresy rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa dla wersji „normalnej” modelu oscylatora anharmonicznego. W celu zachowania spójności rozważań, wyniki otrzymane w tym paragrafie przedstawimy na wykresach dla tegoż modelu.

Szczególne przypadki superpozycji o  $N=2,3,4$  składnikach podajemy dla modelu

$H_I^{(n)}$ . Gdy  $N = 2$ , pozostaje w superpozycji tylko jeden stan koherentny, który zgodnie z (149) jest równy:

$$|\alpha_0, T/2\rangle = |\alpha_0, 2\pi\rangle = |\exp(i\pi)\alpha_0\rangle = |-\alpha_0\rangle. \quad (183)$$

Gdy  $N = 4$ , liczba składników superpozycji jest równa dwa:

$$|\alpha_0, T/4\rangle = |\alpha_0, \pi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp(-i\pi/4)|-\alpha_0\rangle + \exp(i\pi/4)|\alpha_0\rangle\right). \quad (184)$$

Równania (183) i (184) zostały podane przez Yurke'go i Stolera [58] w analizie problemu generacji superpozycji stanów rozróżnialnych makroskopowo. Wyniki te były wielokrotnie cytowane, m. in. przez Tombesi'ego i Mecozi'ego [59], Daniela i Milburna [179], Milburna i in. [190], Sandersa [191], Bużka i in. [201]. W literaturze jest stosowany termin „stan koherentny Yurke'go–Stolera” na określenie stanu (184) (np. [201]).

W chwili  $\tau = 3T/4$  otrzymujemy stan podobny do (184), ale ze współczynnikami, które są sprzężone w sposób zespolony.

Gdy  $N = 3$ , otrzymujemy następującą superpozycję

$$|\alpha_0, T/3\rangle = |\alpha_0, 4\pi/3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\exp(-i\pi/6)|\exp(i2\pi/3)\alpha_0\rangle + \exp(-i\pi/6)|\exp(-i2\pi/3)\alpha_0\rangle + i|\alpha_0\rangle\right) \quad (185)$$

oraz dla  $\tau = 2T/3$  otrzymujemy stan o współczynnikach sprzężonych.

Dla  $N = 6$ , mamy

$$|\alpha_0, T/6\rangle = |\alpha_0, 2\pi/3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\exp(i\pi/6)|\exp(i\pi/3)\alpha_0\rangle + \exp(i\pi/6)|\exp(-i\pi/3)\alpha_0\rangle - i|-\alpha_0\rangle\right). \quad (186)$$

Stan (186) dla  $\tau = \frac{1}{6}T$  różni się od (185) powstającego w chwili  $\tau = \frac{2}{6}T = \frac{1}{3}T$ .

Gdy  $N = 8$ , otrzymujemy

$$|\alpha_0, T/8\rangle = |\alpha_0, \pi/2\rangle = \frac{1}{2}\left(\exp(i\pi/4)|\alpha_0\rangle + i|\alpha_0\rangle - \exp(i\pi/4)|-\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle\right), \quad (187)$$



$$|\alpha_0, 3T/8\rangle = |\alpha_0, 3\pi/2\rangle = \frac{1}{2} \left( -\exp(-i\pi/4)|\alpha_0\rangle + |i\alpha_0\rangle + \exp(-i\pi/4)|-\alpha_0\rangle + |-i\alpha_0\rangle \right). \quad (188)$$

Wyniki (187) i (188) są o tyle interesujące, iż odpowiadają wykresom rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $Q(\alpha, \tau)$  (gdy  $\alpha_0 = 2.0$ ) otrzymanym przez Milburna [61]. Na rysunkach Milburna są widoczne cztery gaussowskie wierzchołki QPD. Struktury o dwu wierzchołkach, odpowiadające stanom koherentnym Yurke’go-Stolera (184), są również widoczne na wykresach Milburna. Wiedząc o superpozycji stanów, możemy z łatwością podać interpretację wielowierzchołkowych funkcji  $Q$ , a w ogólności sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa. Funkcja  $Q$  ma cztery maksima, gdyż reprezentuje stan superpozycji czterech stanów koherentnych. To stwierdzenie jest słuszne, gdy składniki superpozycji są odpowiednio od siebie rozdzielone tak, że człony interferencyjne są do pominięcia. Powstaje pytanie: kiedy składniki superpozycji można uważać za dobrze rozdzielone? Aby odpowiedzieć na to pytanie musimy pamiętać, że gaussowskie rozkłady prawdopodobieństwa mają skończoną szerokość. Załóżmy w sposób dość dowolny, że stany są dobrze rozdzielone jeśli odległość między ich gaussowskimi wierzchołkami w płaszczyźnie zespolonej  $\alpha$  jest równa średnicy przekroju uzyskanego z przecięcia funkcji gaussowskiej w 0.1 jej wysokości. Wówczas średnica może być oszacowana przez  $2\sqrt{\ln 10} \approx 3.03$ . Z drugiej strony, dla wszystkich stanów koherentnych wchodzących w skład superpozycji, zachodzi  $|\alpha_k| = |\alpha_0|$ . To oznacza, że wszystkie funkcje gaussowskie reprezentujące takie stany są równomiernie rozłożone na okręgu o promieniu  $|\alpha_0|$  w płaszczyźnie zespolonej  $\alpha$ . Zatem, maksymalna liczba  $N_{max}$  dobrze rozdzielonych funkcji gaussowskich dla danego  $|\alpha_0|$  może być następująco oszacowana:

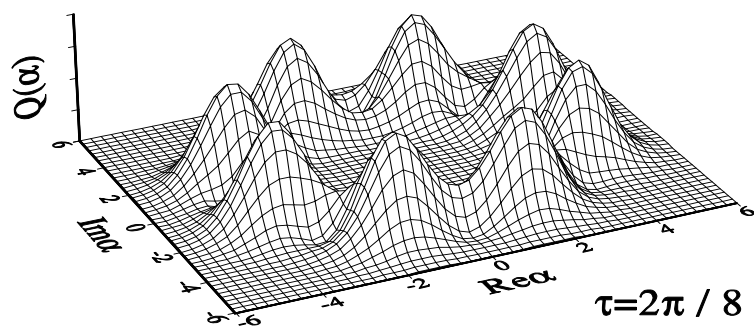
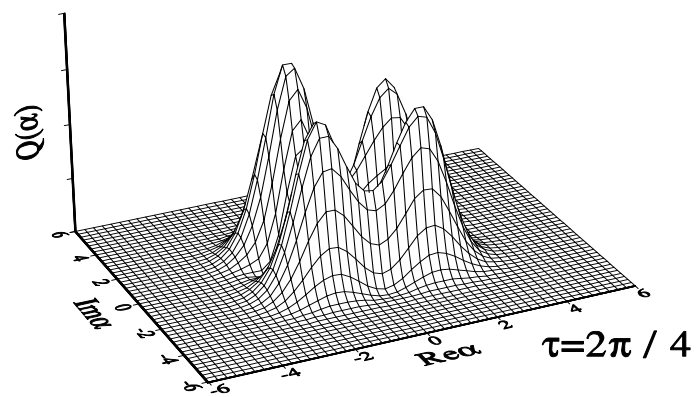
$$N_{max} \approx 2\pi|\alpha_0|/[2\sqrt{\ln 10}] \approx 2.07|\alpha_0|. \quad (189)$$

Z takiego oszacowania dla  $|\alpha_0| = 2$  otrzymujemy maksymalnie cztery dobrze rozdzielone wierzchołki w rozkładzie *quasi*-prawdopodobieństwa. Oto właśnie cztery wierzchołki otrzymane przez Milburna [61]. W odpowiednio dobranej chwili  $\tau$  można rozpoznać struktury QPD o pięciu, a nawet sześciu wierzchołkach. Jednak składowe funkcje gaus-

sowskie nie są wówczas dobrze rozdzielone, a ich kształty są znacząco zmienione przez człony interferencyjne. Podkreślmy, że wpływ członów interferencyjnych jest najmniejszy dla funkcji  $Q$  ( $s = -1$ ) i wzrasta wraz z  $s$ . W przypadku funkcji Wignera o  $|\alpha_0| = 2$  superpozycja nawet dwu stanów koherentnych jest trudna do zidentyfikowania. Zwiększając  $|\alpha_0\rangle$  można wytworzyć dowolną liczbę dobrze rozdzielonych funkcji gaussowskich  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$ . Widzimy, że kryterium (189) (dla przekrojów w 1/10 wysokości wierzchołków) najlepiej opisuje separowalność składników superpozycji dla funkcji  $Q$ . Aby zaproponować analogiczne kryterium dla dowolnie  $s$ -parametryzowanych rozkładów, należy wysokość przekrojów wyrazić jako funkcję  $s$ .

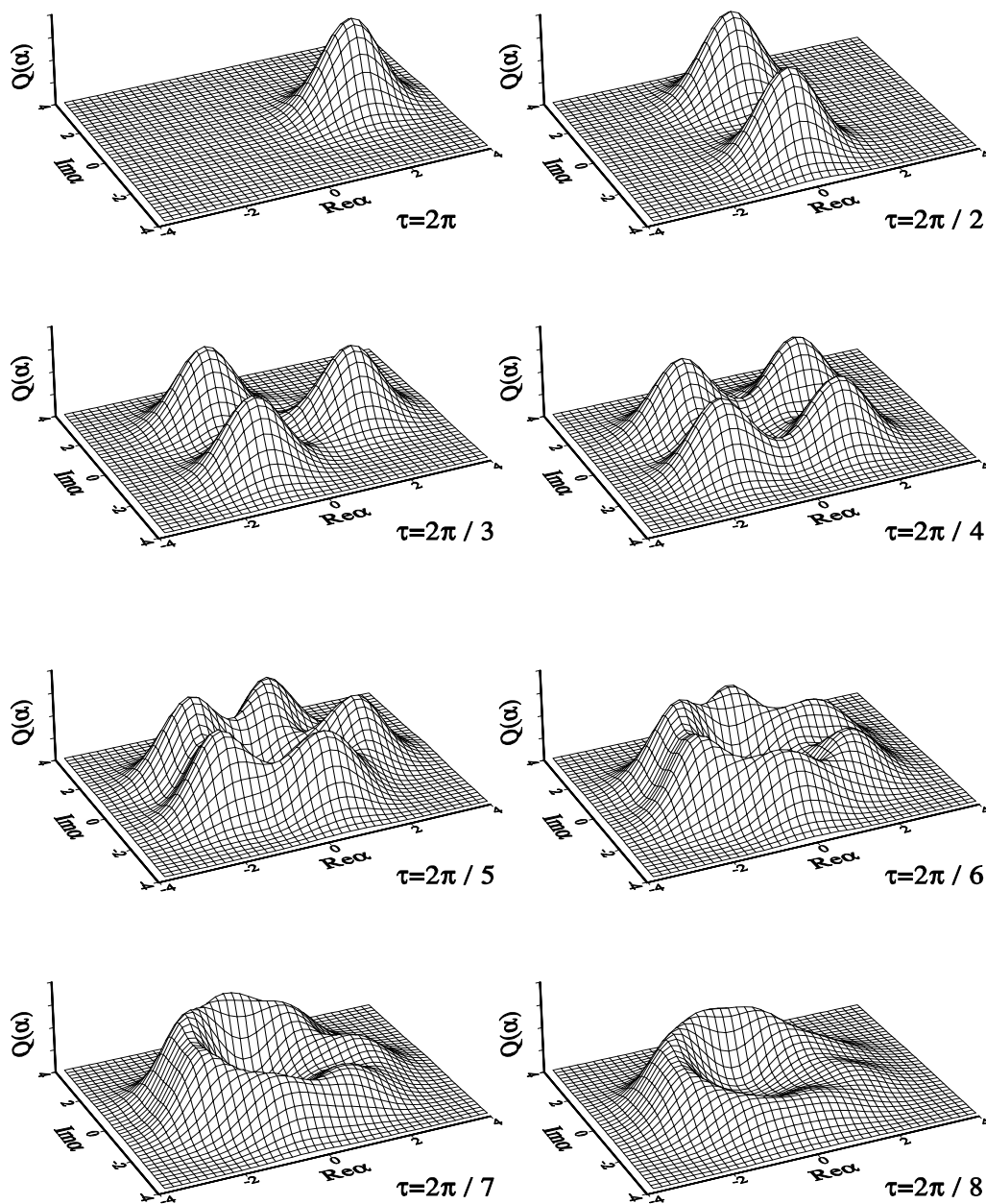
Na rys. 2 przedstawiliśmy dwa przykłady funkcji  $Q$  dla superpozycji kilku stanów koherentnych. Na pierwszym z rysunków widoczne są cztery funkcje gaussowskie dla przypadku rozważanego przez Milburna [61] dla  $\alpha_0 = 2$ . Na drugim, przedstawiliśmy osiem funkcji gaussowskich w przypadku, gdy  $\alpha_0 = 4$ . Zgodnie z naszym oszacowaniem (189) są to maksymalne liczby dobrze rozdzielonych stanów koherentnych odpowiednio dla  $\alpha_0 = 2$  i 4. W obu przypadkach otrzymaliśmy funkcje o regularnych kształtach, co jest potwierdzeniem tworzenia się stanów superpozycji o określonej liczbie składników. Wykresy przedstawiliśmy w tej samej skali, aby podkreślić różnice.

Na rys. 3 wykreśliliśmy funkcję  $Q$  dla dyskretnej superpozycji  $N=1-8$  stanów koherentnych, gdy  $\alpha_0 = 2.0$  ( $\theta_0 = 0$ ) w wersji „normalnej” modelu oscylatora anharmonicznego. Będziemy zakładać, że faza  $\theta_0$  początkowego stanu koherentnego  $\alpha_0$  jest zawsze zerem. Na rys. 4 przedstawiliśmy przekroje funkcji  $Q$  w połowie ich wysokości dla tych samych przypadków co na rys. 3, gdy  $\alpha_0 = 2.0$ . Liniami ciągłymi zaznaczyliśmy przekroje odpowiadające dokładnym wartościom funkcji  $Q$  – wyznaczonym z (177) z uwzględnieniem członów interferencyjnych. Liniami przerywanymi są zaznaczone wyniki odpowiadające powyższym, ale otrzymane z przybliżonego wzoru (182) na  $Q_0$ . Dla maksymalnej liczby dobrze rozdzielonych wierzchołków  $N_{max} = 4$  (gdy  $|\alpha_0| = 2$ ) przekroje nie są regularnymi kołami, tak jak dla niezależnych funkcji gaussowskich. Jednak struktura o wyraźnie zaznaczonych czterech wierzchołkach jest widoczna. Im mniejsza liczba wierzchołków tym większe rozdzielenie stanów, i tym



Rys. 2:

Funkcja  $Q(\alpha)$  dla superpozycji maksymalnej liczby dobrze rozdzielonych stanów koherentnych: (i) dla  $\alpha = 2$  ( $N=4$  stany) oraz (ii) dla  $\alpha = 4$  ( $N=8$  stanów). Wykresy przedstawione w tej samej skali.



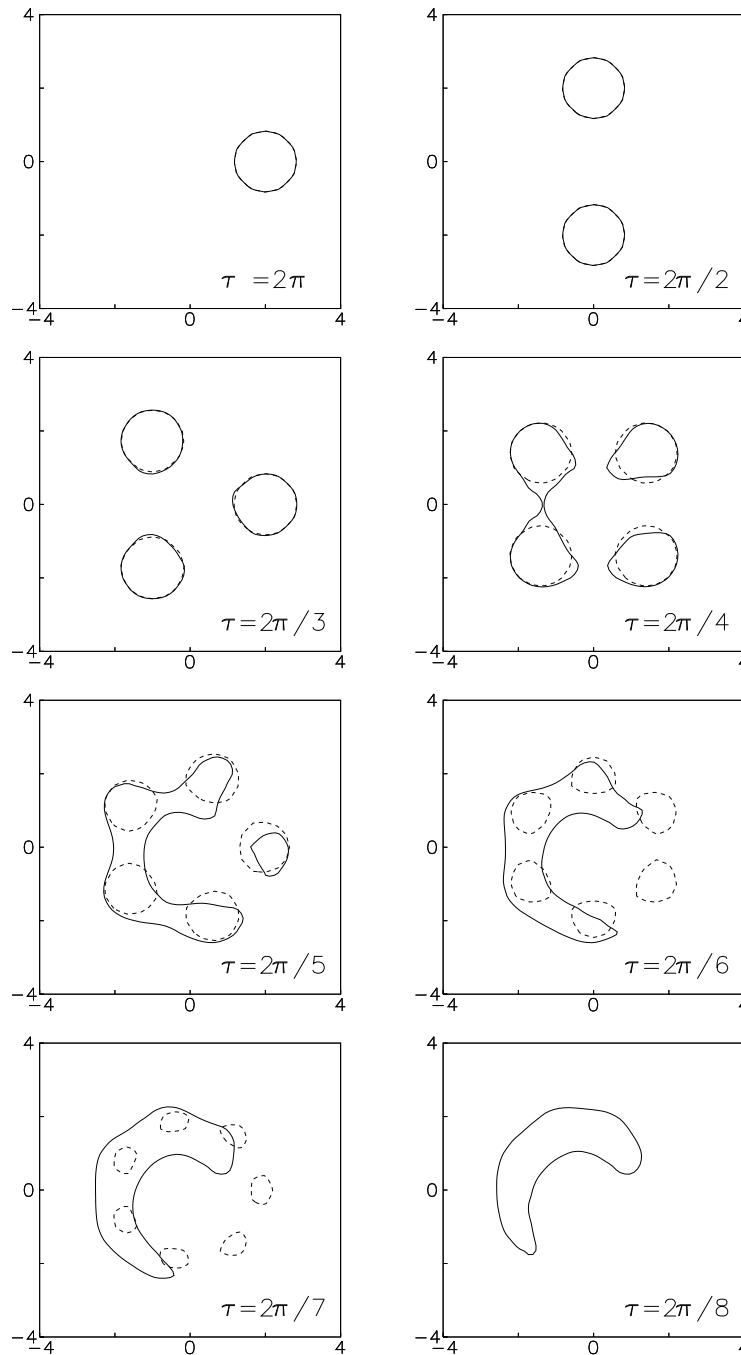
Rys. 3:

Funkcja  $Q(\alpha)$  dla dyskretnej superpozycji  $N$  ( $N=1-8$ ) stanów koherentnych gdy  $|\alpha_0| = \alpha_0 = 2$ .

samym bardziej regularna funkcja  $Q$ . W miarę upływu czasu  $\tau$  pojawiają się struktury o różnej liczbie wierzchołków, które reprezentują stany superpozycji określone wyrażeniami (139), lub konkretnie (183)–(188). Przedstawiliśmy ciąg wykresów dla  $\tau = 2\pi/8, 2\pi/7, 2\pi/6, 2\pi/5, 2\pi/4, 2\pi/3, 2\pi/2, 2\pi$ . Zidentyfikowanie struktur funkcji  $Q$ , odpowiadającym określonym stanom superpozycji, jest oczywiste.

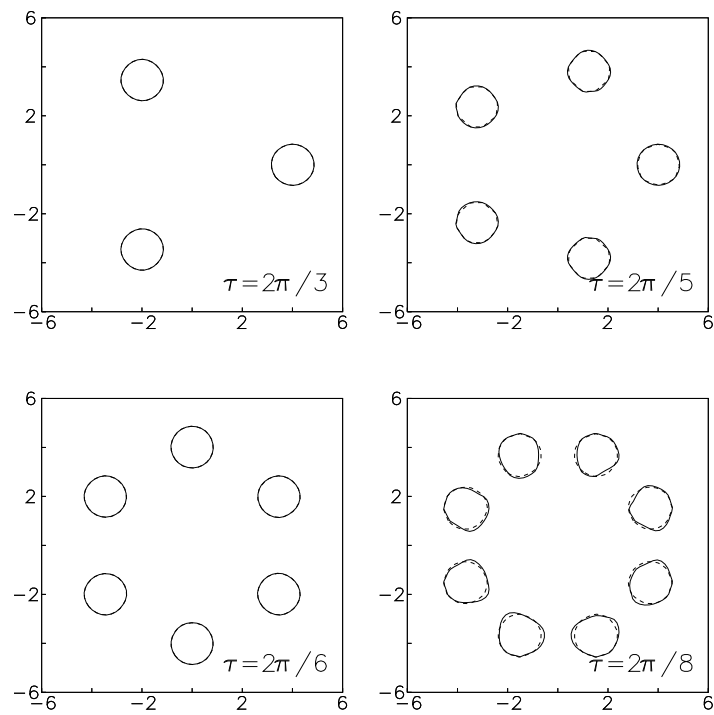
Jak widać na rys. 4, gaussowskie wyrażenia  $Q_0$  (182) całkiem dobrze odtwarzają dokładne wartości funkcji  $Q$ . Wyjątkową zgodność uzyskujemy dla dobrze rozdzielonych wierzchołków ( $N = 1, 2, 3, 4$ ). Na rys. 3 ukazaliśmy rosnącą rolę członów interferencyjnych. Szczególnie jest to widoczne, gdy liczba stanów jest większa od  $N_{max}$ . Złamana zostaje symetria rotacyjna przekrojów funkcji  $Q$ . Zaznaczamy, że przekroje funkcji  $Q_0$  przedstawiliśmy w połowie maksymalnej wysokości  $Q$  (a nie  $Q_0$ ). Dlatego może się zdarzyć dla pewnych wartości  $\tau$  (np.  $\tau \leq 2\pi/8$ , gdy człony interferencyjne  $Q_{int}$  dominują), że przekroje funkcji  $Q_0$  stają się niewidoczne.

Na rys. 5 przedstawiliśmy przekroje funkcji  $Q$  i  $Q_0$  w połowie maksymalnej wysokości  $Q$  dla „normalnej” wersji modelu, gdy  $\alpha_0 = 4.0$ . Po raz kolejny, struktura o maksymalnej liczbie dobrze rozdzielonych wierzchołków, która w tym przypadku wynosi  $N_{max} = 8$ , wykazuje pewną nieregularność. Jeśli liczba wierzchołków maleje, struktury stają się coraz bardziej regularne. Właściwie dla  $N < 8$  nie są widoczne żadne różnice między dokładną funkcją  $Q$ , a jej wartością przybliżoną  $Q_0$ . Wykresy otrzymaliśmy odpowiednio dla  $\tau = 2\pi/8, 2\pi/6, 2\pi/5, 2\pi/3$ . Wybraliśmy przykładowo dwie struktury z parzystą liczbą wierzchołków i dwie z nieparzystą. Zwracamy uwagę, że rys. 4 i 5 przedstawiliśmy w różnych skalach. Promień okręgu, wokół którego są rozmieszczone wierzchołki na rys. 4, jest dwa razy mniejszy niż promień na rys. 5. Z drugiej strony, współczynniki superpozycji  $N$  stanów określają wysokość odpowiadających im wierzchołków zgodnie z  $|c_k| = 1/\sqrt{N}$ . Oznacza to, że wysokości wierzchołków są  $N$  razy mniejsze niż dla funkcji gaussowskiej reprezentującej pojedynczy stan koherentny. Jeśli początkowa liczba fotonów  $|\alpha_0|^2$  staje się duża to maksymalna liczba dobrze rozdzielonych stanów  $N_{max}$  rośnie, ale amplitudy  $c_k$  takich stanów maleją. Ta zależność jest dobrze widoczna na rysunkach 2, gdzie zachowaliśmy tę samą skalę dla  $\alpha_0=2$  i 4.



Rys. 4:

Przekroje funkcji  $Q$  i  $Q_0$  w płaszczyźnie zespolonej  $\alpha$  dla superpozycji  $N=1-8$  stanów koherentnych. Linie ciągłe odpowiadają dokładnym wartościom funkcji  $Q$ , natomiast linie przerywane odpowiadają funkcji  $Q_0$ . Przyjeliśmy, że  $\theta_0 = 0$  i  $|\alpha_0| = 2$ .



Rys. 5:

Przekroje funkcji  $Q$  i  $Q_0$  w płaszczyźnie zespolonej  $\alpha$  dla przykładowych superpozycji  $N=3,5,6,8$  stanów koherentnych, gdy  $\alpha_0 = 4$ . Oznaczenia takie jak na rys. 4.

W tym paragrafie podaliśmy szereg zależności (wzory na współczynniki  $c_k$  w postaci analitycznie zwartej, jawną postać stanów Titulaera-Glaubera dla kilku wartości  $\tau$  oraz własności symetrii) wyłącznie dla wersji „kwadratowej” modelu oscylatora anharmonicznego. Istotną kwestią jest zatem określenie związku między współczynnikami superpozycji dla wersji „kwadratowej” ( $H_I^{(n)}$ ) i wersji normalnie uporządkowanej ( $H_I^{(sq)}$ ) modelu oscylatora anharmonicznego. Proste pogrupowanie wyrazów w rozwiązaniu (149) z uwzględnieniem (149) prowadzi do

$$c_k^{(n)} = c_{M+k}^{(sq)}, \quad (190)$$

gdzie  $M+k \pmod{N}$ . Zatem można by powiedzieć, że różnice między modelami  $H_I^{(n)}$  i  $H_I^{(sq)}$  są trywialne. Jednak pragniemy zwrócić uwagę na fakt, że okresy ewolucji w tych modelach są różne. Jak już zaznaczyliśmy,  $T^{(sq)}$  wynosi  $4\pi$  ( $n^2$  może przyjmować wartości parzyste i nieparzyste), podczas gdy okres  $T^{(n)}$  jest o połowę mniejszy, ponieważ  $n(n-1)$  jest zawsze parzyste. Interesujące następstwa takiej degeneracji hamiltonianu  $H_I^{(n)}$  badali ostatnio Leoński i Tanaś [211]. My zwrócimy uwagę na inny fakt. Wzór (137) można zapisać jako  $\theta^{(n)} = \theta^{(sq)} - \frac{1}{2}\tau n$ . Jeśli ten związek podstawić do (41), to staje się oczywiste, że stany superpozycji powstające w wersji normalnie uporządkowanej wymagają dodatkowej fazy  $\phi = -\frac{1}{2}\tau$ . Zatem, aby otrzymać wzory określające stany superpozycji w tej wersji modelu, należy jedynie zastąpić fazę  $\phi_k$  przez  $(\phi_k - \frac{1}{2}\tau)$  we wzorach dla wersji „kwadratowej”. W geometrycznym sensie ta zmiana oznacza obrót rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa (reprezentujących takie superpozycje) o kąt  $\phi = \frac{1}{2}\tau$  w płaszczyźnie  $\alpha$  bez zmiany kształtu. Taki obrót może oczywiście zmienić w zasadniczy sposób ewolucję rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa. Na przykład, QPD reprezentująca stan (183) jest funkcją gaussowską o maksimum w punkcie  $(-\alpha_0)$ , a po obrocie o  $\pi$  staje się funkcją o środku w punkcie  $\alpha_0$ , tj. w początkowym punkcie. Nie powstanie nigdy pojedyncza funkcja gaussowska o wierzchołku w punkcie  $(-\alpha_0)$  w przypadku normalnie uporządkowanej wersji modelu. To jest ogólna zasada związana z faktem, że okres dla wersji normalnie uporządkowanej jest połową okresu dla wersji „kwadratowej”.



Reasumując możemy zapisać:

$$\begin{aligned}
|\alpha_0, \tau\rangle^{(n)} &= \sum_k c_k^{(n)} |\exp(i\phi_k) \alpha_0\rangle \\
&= \sum_k c_{k+M}^{(sq)} |\exp(i\phi_k) \alpha_0\rangle \\
&= \sum_k c_k^{(sq)} |\exp(i\phi_k - i\tau/2) \alpha_0\rangle.
\end{aligned} \tag{191}$$

Stany koherentne Titulaera-Glaubera (41) tworzą dyskretną superpozycję glauberowskich stanów koherentnych w dowolnej chwili  $\tau$  będącej wymiernym ułamkiem okresu  $T$  ( $\frac{M}{N} \in \mathbf{Q}$ ). Na zakończenie tego paragrafu podkreślimy, że stany (41) zawsze ( $\frac{M}{N} \in \mathbf{R}$ ) mogą być przedstawione w postaci ciągłej superpozycji stanów koherentnych  $|e^{i\phi} \alpha_0\rangle$  [56] (także [212, 213, 214]):

$$|\alpha_0, \tau\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f(\phi) |e^{i\phi} \alpha_0\rangle, \tag{192}$$

gdzie

$$f(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp[i(\theta_n - n\phi)] \tag{193}$$

jest uogólnioną transformatą Fouriera w postaci dystrybucji Diraca.

## 4.2 Statystyka liczby fotonów oraz ścieśnianie światła

We wstępie przedstawimy kilka definicji i podstawowych wzorów opisujących statystykę liczby fotonów, ścieśnianie oraz ścieśnianie w osiach głównych.

Rozpocniemy analizę statystyki liczby obsadzeń od definicji rozkładu prawdopodobieństwa  $p(n)$  znalezienia  $n$  fotonów w polu  $k$ -modowym w danej objętości  $V$  w chwili  $t$ :

$$p(n) = \sum_{\{n_k\}} \langle \{n_k\} | \hat{\rho} | \{n_k\} \rangle \delta_{n, \sum n_k}, \tag{194}$$

gdzie  $n_k = |\alpha_k|^2$ . Mandel [215, 216] sformułował twierdzenie o fotodetekcji wiążące ciągły rozkład intensywności  $\mathcal{W}^{(1)}(W, t)$  z dyskretnym rozkładem zliczeń fotonów  $p(n)$ .

Integralną intensywność  $W$  definiuje się jako średnią wartość operatora liczby fotonów w stanach koherentnych:

$$W = \langle \{\alpha_k\} | \hat{n} | \{\alpha_k\} \rangle = \sum_k |\alpha_k|^2. \quad (195)$$

Uogólnione równanie fotodetekcji dla sparametryzowanego rozkładu  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}, t)$  podamy za Peřiną i Horakiem [217, 24]:

$$\begin{aligned} p(n) &= \left( \frac{2}{1+s} \right)^M \left( \frac{s-1}{1+s} \right)^n \int \mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}) \\ &\times \exp \left( -\frac{2}{1+s} \sum_k |\alpha_k|^2 \right) L_n^{M-1} \left( \frac{4}{1-s^2} \sum_k |\alpha_k|^2 \right) d^2 \{\alpha_k/\pi\}, \end{aligned} \quad (196)$$

gdzie  $L_n^{M-1}(x)$  jest uogólnionym wielomianem Laguerre'a. Równie dobrze można zapisać równanie (196) dla sparametryzowanego rozkładu intensywności  $\mathcal{W}^{(s)}(W, t)$ . Formalnie będziemy utożsamiać rozkład liczby fotonów (194) z rozkładem zliczeń fotonów. Oczywiście, w ogólnym przypadku te rozkłady mają inną interpretację fizyczną. Jednak przy założeniu idealnej fotodetekcji istnieje pełna fizyczna równoważność między statystycznymi momentami liczby fotonów wyznaczonymi z rozkładów (194) i (196) (np. [21, 218, 219]).

Opracowano wiele innych sposobów wyznaczania rozkładu  $p(n)$ , na przykład za pomocą sparametryzowanych funkcji tworzących  $\langle \exp(-\lambda W) \rangle_{(s)}$  wyznaczonych z rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}, t)$  lub z funkcji charakterystycznych  $\mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\}, t)$  [24]:

$$\begin{aligned} \langle \exp(-\lambda W(t)) \rangle_{(s)} &= \int \mathcal{W}^{(s)}(\{\alpha_k\}, t) \exp \left( -\lambda \sum_k |\alpha_k|^2 \right) d^2 \{\alpha_k/\pi\} \\ &= \lambda^{-M} \int \mathcal{C}^{(s)}(\{\beta_k\}, t) \exp \left( -\frac{1}{\lambda} \sum_k |\beta_k|^2 \right) d^2 \{\beta_k/\pi\}. \end{aligned} \quad (197)$$

Rozkład liczby fotonów  $p(n, t)$  i sparametryzowane momenty  $\langle \hat{n}^k \rangle_{(s)}$  można w prosty sposób obliczyć korzystając z funkcji tworzącej (197):

$$p(n) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left( 1 + \frac{s-1}{2} \lambda \right)^{-M} \left\langle \exp \left( -\frac{\lambda}{1 + \frac{s-1}{2} \lambda} W \right) \right\rangle_{(s)} \Big|_{\lambda=1}, \quad (198)$$

$$\langle \hat{n}^k \rangle_{(s)} = \langle W^k \rangle_{(s)} = (-1)^k \frac{d^k}{d\lambda^k} \langle \exp(-\lambda W) \rangle_{(s)} \Big|_{\lambda=0}. \quad (199)$$

Równanie (198) przyjmuje najprostszą formę dla uporządkowania normalnego.

W literaturze spotyka się wiele różnych parametrów opisujących statystykę liczby fotonów, np.: parametr  $Q$  Mandela, czynnik  $F$  Fano, stopień spójności drugiego rzędu  $g^{(2)}$ . W dysertacji wykorzystamy znormalizowane funkcje korelacji drugiego rzędu, a ściślej – znormalizowane momenty silniowe <sup>23</sup> dla operatora liczby cząstek ([219, 24] oraz prace tam cytowane):

$$\gamma_k^{(2)} = \frac{\langle(\Delta\hat{n}_k)^2\rangle_{(1)}}{\langle\hat{n}_k\rangle^2} = \frac{\langle\hat{n}_k^2\rangle_{(1)}}{\langle\hat{n}_k\rangle^2} - 1 = \frac{\langle\hat{n}_k(\hat{n}_k - 1)\rangle}{\langle\hat{n}_k\rangle^2} - 1. \quad (200)$$

Uogólnienie na momenty  $p$ -tego rzędu polega na zamianie wyrażeń  $\hat{n}^{[2]} = \hat{n}(\hat{n} - 1)$  na  $\hat{n}^{[p]} = \hat{n}(\hat{n} - 1) \cdots (\hat{n} - p + 1)$  i  $\langle\hat{n}\rangle^2$  na  $\langle\hat{n}\rangle^p$ . Momenty  $p$ -tego rzędu dla modelu rozpraszania ramanowskiego analizowaliśmy gdzie indziej [64]. Dwumodowe momenty silniowe rzędu drugiego  $\gamma_{kl}^{(2)}$  można wyrazić poprzez momenty jednomodowe

$$\gamma_{kl}^{(2)} = \frac{\langle(\Delta\hat{n}_{kl})^2\rangle_{(1)}}{\langle\hat{n}_{kl}\rangle^2} = \frac{\langle(\Delta\hat{n}_k)^2\rangle_{(1)} + \langle(\Delta\hat{n}_l)^2\rangle_{(1)} + 2\langle\Delta\hat{n}_k\Delta\hat{n}_l\rangle}{\langle\hat{n}_k\rangle^2 + \langle\hat{n}_l\rangle^2 + 2\langle\hat{n}_k\rangle\langle\hat{n}_l\rangle}, \quad (201)$$

gdzie  $\hat{n}_{kl} = \hat{n}_k + \hat{n}_l$ . Parametr  $Q$  Mandela dla  $k$ -tego modu jest równy  $\gamma_k^{(2)}\langle\hat{n}_k\rangle$ , podczas gdy czynnik  $F$  Fano wyraża się przez  $(\gamma_k^{(2)}\langle\hat{n}_k\rangle + 1)$  (przyjeliśmy, że wydajność fotodetektora  $\eta$  jest równa jedności), czy wreszcie stopień spójności drugiego rzędu jest równy  $g_k^{(2)} \equiv g_k^{(2)}(t, t) = \gamma_k^{(2)} + 1$ .

Światło, którego fluktuacje liczby fotonów są mniejsze niż fluktuacje pola koherentnego (opisywanego przez rozkład poissonowski) jest nazywane światłem o statystyce subpoissonowskiej, lub prościej – światłem subpoissonowskim <sup>24</sup>. W tym wypadku współczynnik korelacji  $\gamma^{(2)}$  staje się ujemny. Dla światła o statystyce poissonowskiej liczby fotonów współczynnik  $\gamma^{(2)}$  się zeruje. Natomiast światło o fluktuacjach większych niż fluktuacje pola koherentnego, opisywane przez dodatni współczynnik korelacji  $\gamma^{(2)}$ , nazywamy światłem o statystyce superpoissonowskiej, lub światłem superpoissonowskim <sup>25</sup>. Analogiczny podział pól dwumodowych w zależności od statystyki liczby fotonów można przedstawić dla dwumodowych współczynników korelacji  $\gamma_{kl}^{(2)}$  [24]. Niestety

<sup>23</sup>ang. normalized factorial moments

<sup>24</sup>ang. sub-Poissonian statistics/distribution/light

<sup>25</sup>ang. super-Poissonian statistics/distribution/light

w dwumodowym modelu rozpraszania ramanowskiego, omówionym w paragrafie 3.2, operator liczby fotonów w obu modach  $\hat{n}_{LS} = \hat{n}_L + \hat{n}_S$  jest stałą ruchu, co oznacza, że dwumodowe współczynniki korelacji  $\gamma_{kl}^{(2)}$  są również stałe. Przyjmijmy zatem inną definicję dwumodowych korelacji wzajemnych, np.:

$$g_{kl}^{(2)} = \frac{\langle \Delta \hat{n}_k \Delta \hat{n}_l \rangle}{\langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_l \rangle} = \frac{\langle \hat{n}_k \hat{n}_l \rangle}{\langle \hat{n}_k \rangle \langle \hat{n}_l \rangle} - 1. \quad (202)$$

W istocie jest to powszechnie stosowany (m.in. przez Loudona w jego słynnym podręczniku [110]) międzymodowy stopień spójności drugiego rzędu <sup>26</sup>. Nasza definicja różni się od definicji Loudona jedynie przesunięciem o  $-1$ . Dwumodowa statystyka subpoissonowska jest scharakteryzowana ujemnym współczynnikiem  $g_{kl}^{(2)}$ , natomiast superpoissonowska – dodatnim.

Analizę ścieśniania światła rozpoczniemy od zdefiniowania jedno- i dwumodowych operatorów hermitowskich:

$$\hat{X}_k(\theta) = \hat{a}_k e^{-i\theta} + \hat{a}_k^+ e^{i\theta}, \quad (203)$$

$$\hat{X}_{jk}(\theta) = \hat{a}_{jk} e^{-i\theta} + \hat{a}_{jk}^+ e^{i\theta} = \hat{X}_j(\theta) + \hat{X}_k(\theta), \quad (204)$$

gdzie  $\hat{a}_{kl} = \hat{a}_k + \hat{a}_l$ . Operator  $\hat{X}_k(\theta = 0) \equiv \hat{X}_{k1}$  jest formalnie równoważny uogólnionemu operatorowi położenia dla  $k$ -tego oscylatora harmonicznego (modu), podczas gdy  $\hat{X}_k(\theta = \pi/2) \equiv \hat{X}_{k2}$  odpowiada formalnie uogólnionemu operatorowi pędu. Hermitowskie operatory  $\hat{X}_{k1}$  i  $\hat{X}_{k2}$  są czasem nazywane kwadraturami pola <sup>27</sup> w  $k$ -tym modzie. Podobnie definiujemy i interpretujemy dwumodowe operatory  $\hat{X}_{kl}(0) \equiv \hat{X}_{kl1}$  i  $\hat{X}_{kl}(\pi/2) \equiv \hat{X}_{kl2}$ . Zachodzą następujące związki komutacyjne

$$\left[ \hat{X}_{k1}, \hat{X}_{k2} \right] = 2i, \quad (205)$$

$$\left[ \hat{X}_{kl1}, \hat{X}_{kl2} \right] = 4i. \quad (206)$$

---

<sup>26</sup>ang. interbeam degree of second-order coherence

<sup>27</sup>ang. quadrature field operators, quadrature components

Omówmy wpieryw przypadek jednomodowy. Wariancja operatora  $\hat{X}_k(\theta)$  ( 203) jest równa:

$$\langle(\Delta\hat{X}_k(\theta))^2\rangle = 2\text{Re} [e^{-2i\theta}\langle(\Delta\hat{a}_k)^2\rangle] + \langle\{\Delta\hat{a}_k^+, \Delta\hat{a}_k\}\rangle. \quad (207)$$

W szczególności ( 207) określa wariancje  $\hat{X}_{k1}$  i  $\hat{X}_{k2}$ , dla których zasada nieoznaczoności Heisenberga ma postać

$$\langle(\Delta\hat{X}_{k1})^2\rangle\langle(\Delta\hat{X}_{k2})^2\rangle \geq 1, \quad (208)$$

Zasada ( 208) jest podstawą powszechnie przyjmowanej definicji ścieśniania światła. Będziemy mówić o ścieśnianiu (ściskaniu) w zwykłym sensie <sup>28</sup>, jeśli którakolwiek z wariancji operatorów  $\hat{X}_{k1}$  lub  $\hat{X}_{k2}$  jest mniejsza od jedności (ogólnie, od pierwiastka kwadratowego z wyrażenia po prawej stronie nierówności Heisenberga dla operatorów kwadraturowych). Inaczej można powiedzieć, że światło jest ścieśnione, gdy jego fluktuacje w jednej z kwadratur są mniejsze niż fluktuacje pola koherentnego (minimalizującego zasadę nieoznaczoności ( 208)). W szczególności, idealne stany ścieśnione omawiane w paragrafie 2.1 (także w §7.2.2) spełniają powyższą definicję.

Dla danego stanu kwantowego wariancja ( 207) jest zależna od  $\theta$ , zatem można wybrać kąt w taki sposób, aby wariancja przyjęła wartości ekstremalne. Różniczkowanie ze względu na  $\theta$  umożliwia wyznaczenie kątów  $\theta_+$  i  $\theta_-$  odpowiednio dla wariancji maksymalnej i minimalnej [220, 221]:

$$\exp(2i\theta_{\pm}) = \pm \left( \frac{\langle(\Delta\hat{a}_k)^2\rangle}{\langle(\Delta\hat{a}_k^+)^2\rangle} \right)^{1/2}, \quad (209)$$

gdzie zachodzi  $|\theta_+ - \theta_-| = \pi/2$ . Po wstawieniu ( 209) do ( 207) można otrzymać wyrażenie na wariancje ekstremalne

$$\begin{aligned} \langle(\Delta\hat{X}_{k\pm})^2\rangle &\equiv \langle(\Delta\hat{X}_k(\theta_{\pm}))^2\rangle \\ &= \pm 2 |\langle(\Delta\hat{a}_k)^2\rangle| + \langle\{\Delta\hat{a}_k^+, \Delta\hat{a}_k\}\rangle. \end{aligned} \quad (210)$$

---

<sup>28</sup>ang. squeezing, standard squeezing, usual squeezing

Jak zauważył Loudon [221],  $\langle(\Delta\hat{X}_k(\theta))^2\rangle$  wyraża się w prosty sposób przez wariancje ekstremalne

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{X}_k(\theta))^2\rangle &= \langle(\Delta\hat{X}_{k-})^2\rangle \cos^2(\theta - \theta_-) \\ &+ \langle(\Delta\hat{X}_{k+})^2\rangle \sin^2(\theta - \theta_-),\end{aligned}\quad (211)$$

co jest równaniem na eliptyczną lemniskatę Bootha we współrzędnych biegunowych. Ścieśnianie w osiach głównych <sup>29</sup> (ścieśnianie główne), zgodnie z definicją Lukš'a i in. [220, 222], pojawia się wtedy, gdy wariancja minimalna jest mniejsza od jedności

$$\langle(\Delta\hat{X}_{k-})^2\rangle \leq 1. \quad (212)$$

Ścieśnianie w osiach głównych można sformułować w matematycznie elegancki sposób korzystając z uogólnionej zasady nieoznaczoności (zwanej również zasadą Schrödingera) [223, 220, 224]:

$$\langle(\Delta\hat{X}_{k1})^2\rangle\langle(\Delta\hat{X}_{k2})^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle\{\Delta\hat{X}_{k1}, \Delta\hat{X}_{k2}\}\rangle^2 + 1, \quad (213)$$

gdzie pojawia się kowariancja Wignera operatorów kwadraturowych  $\hat{X}_{k1}$  i  $\hat{X}_{k2}$ . Uogólniona zasada Heisenberga ( 213) redukuje się do zwykłej zasady ( 208) dla wariancji ekstremalnych  $\langle(\Delta\hat{X}_{k\pm})^2\rangle$ .

Uogólnienie powyższych definicji na przypadek dwumodowy jest proste. Wiedząc, że komutator ( 206) ma wartość dwa razy większą niż ( 205) w przypadku jednomodowym, wnioskujemy, że dwumodowe ścieśnienie w zwykłym sensie występuje wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\min \left\{ \langle(\Delta\hat{X}_{kl1})^2\rangle, \langle(\Delta\hat{X}_{kl2})^2\rangle \right\} \leq 2, \quad (214)$$

natomiast dwumodowe ścieśnienie w osiach głównych oznacza, że zachodzi

$$\langle(\Delta\hat{X}_{kl-})^2\rangle \leq 2. \quad (215)$$

Dwumodowe wariancje i kowariancje Wignera, potrzebne do wyznaczenia wzorów (214) i (215), można wyrazić poprzez momenty statystyczne pól jednomodowych:

$$\langle(\Delta\hat{X}_{kl})^2\rangle = \langle(\Delta\hat{X}_k)^2\rangle + \langle(\Delta\hat{X}_l)^2\rangle + 2\langle\Delta\hat{X}_k\Delta\hat{X}_l\rangle, \quad (216)$$

---

<sup>29</sup>tłumaczenie ad sensum ang. principal squeezing

$$\begin{aligned} \langle \{ \Delta \hat{X}_{kl1}, \Delta \hat{X}_{kl2} \} \rangle &= \langle \{ \Delta \hat{X}_{k1}, \Delta \hat{X}_{k2} \} \rangle + \langle \{ \Delta \hat{X}_{l1}, \Delta \hat{X}_{l2} \} \rangle \\ &+ 2 \langle \Delta \hat{X}_{k1} \Delta \hat{X}_{l2} \rangle + 2 \langle \Delta \hat{X}_{k2} \Delta \hat{X}_{l1} \rangle. \end{aligned} \quad (217)$$

gdzie, dla uproszczenia zapisu, pominięliśmy zależność od  $\theta$ .

Analizę kwantowych własności pól promieniowania omówimy na dwóch przykładach: (i) w modelu oscylatora anharmonicznego wprowadzonego w paragrafie 2.2 oraz (ii) w modelu rozpraszania ramanowskiego z rozdziału 3.

#### 4.2.1 Model oscylatora anharmonicznego

Kilka lat temu Tanaś i Kielich [51, 52] pokazali, że światło o dużej intensywności podczas propagacji w ośrodku kerrowskim może ścieśnić swoje fluktuacje. To zjawisko zostało nazwane samo-ścieśnianiem (samo-ściśnięciem)<sup>30</sup>. Pokazano możliwość ściśnienia światła aż w 98%. Model wykorzystany w [51, 52] jest w istocie dwumodową wersją oscylatora anharmonicznego opisującą propagację światła o polaryzacji eliptycznej w nieliniowym ośrodku kerrowskim. Jednomodową wersję zjawiska samo-ścieśniania światła o polaryzacji kołowej w izotropowym ośrodku kerrowskim z hamiltonianem oddziaływania (33c) rozważył Tanaś [176]. Pokazano możliwość samo-ścieśnienia światła w takim stopniu, jak w przypadku dwumodowym.

W modelu oscylatora anharmonicznego, określonym w §2.2, wariancja hermitowskiego operatora  $\hat{X}_\theta$ , jest równa [176]:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{X}(\theta))^2 \rangle &= 2|\alpha_0|^2 \left\{ \exp[|\alpha_0|^2(\cos 2\tau - 1)] \cos[2(\theta - \theta_0) + \tau + |\alpha_0|^2 \sin 2\tau] \right. \\ &\quad - \exp[2|\alpha_0|^2(\cos \tau - 1)] \cos[2(\theta - \theta_0) + 2|\alpha_0|^2 \sin \tau] + 1 \\ &\quad \left. - \exp[2|\alpha_0|^2(\cos \tau - 1)] \right\} + 1 \end{aligned} \quad (218)$$

przy założeniu, że początkowe pole jest w stanie koherentnym  $\alpha_0 = |\alpha_0| \exp(i\theta_0)$ . Łatwo zauważyć analizując równanie (218), że operatory kwadraturowe  $\hat{X}_1$  i  $\hat{X}_2$  są zdefiniowane w odniesieniu do początkowej fazy pola, tj.  $\hat{X}_1$  odpowiada fazie  $\theta - \theta_0 = 0$ , a  $\hat{X}_2$  – fazie  $\theta - \theta_0 = \pi/2$ . Z równania (209) w prosty sposób otrzymujemy

$$\exp(2i\theta_\pm) = \pm \exp(2i\theta_0 + i\tau + |\alpha_0|^2 \sin 2\tau), \quad (219)$$

---

<sup>30</sup>ang. self-squeezing

co prowadzi do

$$\theta_+ = \theta_0 + \frac{1}{2}(\tau + |\alpha_0|^2 \sin 2\tau) \quad (220)$$

oraz

$$\theta_- = \theta_+ + \frac{\pi}{2}. \quad (221)$$

To oznacza, że fazy  $\theta_{\pm} = \theta_{\pm}(\tau)$ , dla których wariancje przyjmują wartości ekstremalne, zależą od  $\tau$ , tj. zmieniają się w trakcie ewolucji oscylatora. Wariancje ekstremalne zdefiniowane przez (210) określone są wzorem [222]:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{X}_{\pm})^2 \rangle &= \pm 2|\alpha_0|^2 \left\{ \exp[2|\alpha_0|^2(\cos 2\tau - 1)] + \exp[4|\alpha_0|^2(\cos \tau - 1)] \right. \\ &\quad \left. - 2 \exp[|\alpha_0|^2(\cos 2\tau + 2 \cos \tau - 3)] \cos[\tau + |\alpha_0|^2(\sin 2\tau - 2 \sin \tau)] \right\}^{1/2} \\ &\quad + 2|\alpha_0|^2 \{1 - \exp[2|\alpha_0|^2(\cos 2\tau - 1)]\} + 1. \end{aligned} \quad (222)$$

Wariancje ekstremalne (222) dla modelu oscylatora anharmonicznego opisują ścieśnianie w osiach głównych (ścieśnianie główne) nazwane tak przez Lukša i in. [220]. Oczywiście ścieśnianie w osiach głównych ewoluuje wraz z  $\tau$  wykazując periodyczność dla  $\tau = 2k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Zależności wariancji (218) i (222) od czasu (lub długości ośrodka) dla małej liczby fotonów  $|\alpha|^2$  zostały omówione przez Lukša i in. [222]. Natomiast zanik kwantowej koherencji w wyniku wzmacniania lub tłumienia pola pokazali Daniel i Milburn [179].

Wzory (218) i (222) określające ścieśnianie zwykłe i ścieśnianie w osiach głównych, pojawiające się w modelu oscylatora anharmonicznego, są dokładnymi analitycznymi wyrażeniami. Jednak, jeśli model ma opisywać realną propagację światła w ośrodku kerrowskim, to należy przyjąć bardzo małe wartości  $\tau$  ( $\tau \sim 10^{-6}$  jest raczej optymistycznym oszacowaniem [51, 52]) i bardzo dużą liczbę fotonów ( $|\alpha_0|^2 \gg 1$ ). Można wówczas wyznaczyć prostsze analitycznie wzory przybliżone opisujące wariancje. Dla przypadku  $\tau \ll 1$  i  $|\alpha_0|^2 \gg 1$  wprowadzamy nową zmienną

$$x = |\alpha_0|^2 \tau, \quad (223)$$



która prawidłowo opisuje skalę istotnych zmian w wariancjach [176]. Rozwijając wariancje (218) i (222) w szereg względem  $\tau$  i zachowując jedynie człony dominujące, otrzymujemy następujące wzory

$$\langle(\Delta\hat{X}(\theta))^2\rangle = 1 + 2x\{x[1 - \cos 2\phi(x)] - \sin 2\phi(x)\}, \quad (224)$$

gdzie

$$\phi(x) = \theta_0 - \theta + x \quad (225)$$

oraz

$$\langle(\Delta\hat{X}_{\pm})^2\rangle = 1 + 2x[x \pm (1 + x^2)^{1/2}] \quad (226)$$

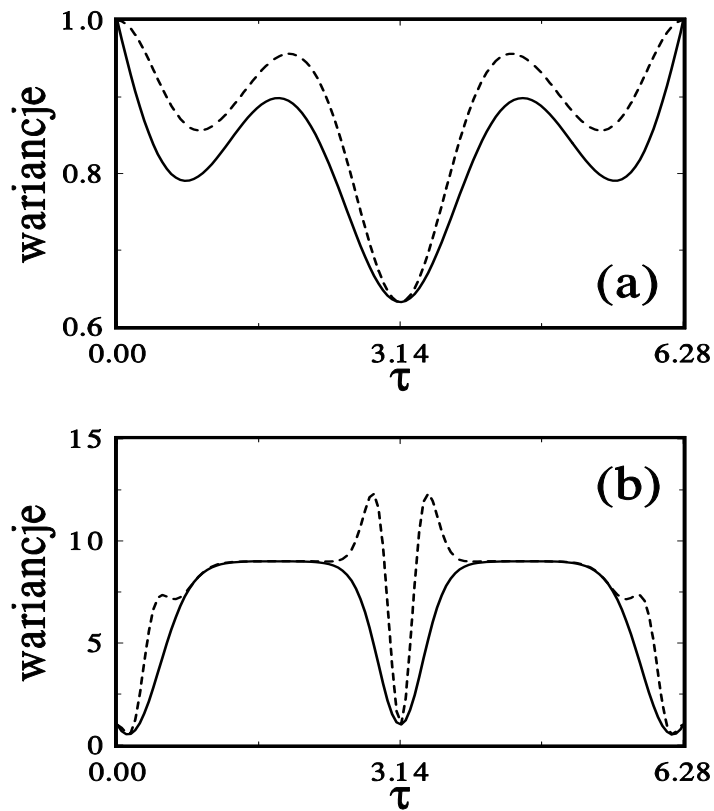
Nasze wyrażenia (224) i (226) są prostymi analitycznymi wzorami opisującymi w sposób przybliżony ścieśnianie zwykle oraz główne w układzie. Im mniejszy czas  $\tau$  tym lepsze przybliżenie. Wyrażenie (226) dla wariancji ekstremalnych można również wyznaczyć, zamiast rozwinięcia (222) w szereg, ze wzoru (224) poprzez znalezienie wartości ekstremalnych. Pierwsza pochodna względem  $\theta$  pozwala określić warunki na ekstrema:

$$x \sin 2\phi(x) = \cos 2\phi(x) \quad (227)$$

oraz

$$\sin 2\phi(x) = \pm(1 - x^2)^{-1/2}, \quad (228)$$

które bezpośrednio prowadzą do (226). Tak jak poprzednio, wzór (224) określa kwadraturowe operatory pola:  $\hat{X}_1 = \hat{X}(\theta - \theta_0 = 0)$  oraz  $\hat{X}_2 = \hat{X}(\theta - \theta_0 = \pi/2)$ . Jedynym członem kwantowym w (224), który pojawia się w wyniku komutacji operatorów pola, jest ostatni zawierający funkcję  $\sin 2\phi(x)$ . Ten człon występuje także w (226) jako jedność pod pierwiastkiem kwadratowym. Gdybyśmy ominęli te wyrażenia, to wariancje (224) i (226) nigdy by nie były mniejsze od wariancji pola koherentnego (lub próżni). Powyższe człony są odpowiedzialne za ścieśnianie w modelu oscylatora anharmonicznego dla krótkich czasów ewolucji ( $\tau \ll 1$ ) i dużej liczby fotonów ( $|\alpha_0|^2 \gg 1$ ). Z wzoru



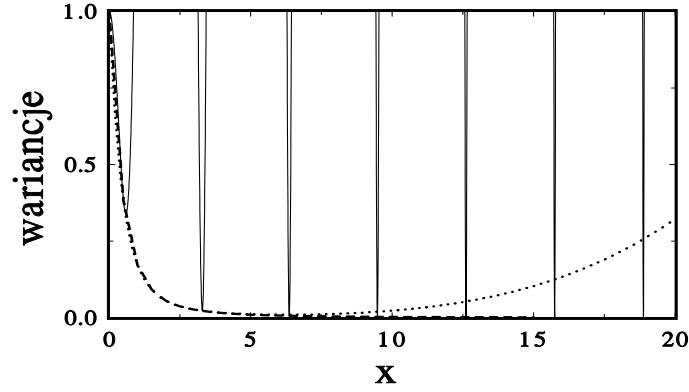
Rys. 6:  
Wykresy variancji  $\langle(\Delta X_+)^2\rangle$  (linie ciągłe)  $\langle(\Delta X_-)^2\rangle$  (linie przerywane) dla  
średniej liczby fotonów: (a)  $|\alpha_0|^2 = 0.25$  i (b)  $|\alpha_0|^2 = 4$

(220) otrzymujemy następującą fazę dla  $\tau \ll 1$ :

$$\theta_+ \approx \theta_0 + x, \quad (229)$$

która jest funkcją intensywności pola. Aby skompensować te zmiany fazy metodą dynamiczną, należy modyfikować fazę oscylatora lokalnego.

Na rys. 6 wykreśliśmy variancje (218) i (222) w zależności od czasu (lub drogi) ewolucji dla małej liczby fotonów  $|\alpha_0|^2$  równej 0.25 lub 4. Takie krzywe przedstawił już Lukš i in. [222]. Podobne wyniki w kontekście zaniku kwantowej koherencji poprzez tłumienie i wzmocnienie omówili Daniel i Milburn [179]. Ilekroć variancje  $\langle(\Delta \hat{X}_+)^2\rangle$  lub  $\langle(\Delta \hat{X}_-)^2\rangle$  przyjmują wartości mniejsze od jedności to występuje ściężnienie światła

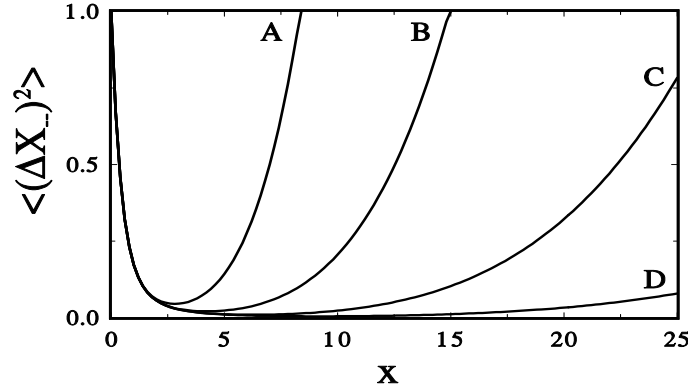


Rys. 7:

Wykresy wariacji przybliżonych:  $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle$  (linia ciągła) i  $\langle(\Delta\hat{X}_-)^2\rangle$  (linia przerywana) oraz wariacji dokładnej  $\langle(\Delta\hat{X}_-)^2\rangle$  (linia punktowa) obliczonych odpowiednio ze wzorów (224), (226) i (222). Wariacje są wykreślone względem zmiennej  $x$  (223).

w składowej  $X_1$  lub ścieśnieniu w osiach głównych. Krzywe ciągłe na rys. 6, opisujące ścieśnianie w osiach głównych, ukazują możliwość uzyskania maksymalnego ścieśnienia w określonej chwili  $\theta$  dla odpowiednio dobranej fazy  $\theta$ . Widzimy, że dla małej liczby fotonów efekt ścieśnienia nie jest duży.

Nasze wzory (224) i (226) przedstawiliśmy na rys. 7 i 8. Na rys. 7 wariacje  $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle$  i  $\langle(\Delta\hat{X}_-)^2\rangle$  wykreślono względem  $x$ . Widoczne są oscylacje wariacji  $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle$ , co w prosty sposób wynika z (224). Ścieśnianie ekstremalne opisuje obwódka – wariacja  $\langle(\Delta\hat{X}_-)^2\rangle$ . Określa zarazem kres dolny wszystkich wariacji  $\langle(\Delta\hat{X}(\theta))^2\rangle$  [kres górny określa  $\langle(\Delta\hat{X}_+)^2\rangle$ ]. Obwódka  $\langle(\Delta\hat{X}_-)^2\rangle$ , na mocy (226), jest monotonicznie malejącą funkcją  $x$ , która asymptotycznie zmierza do zera. Zatem kolejne minima stają coraz głębsze wraz ze wzrostem  $x$  i ich wartości stają się coraz bliższe zera. To oznacza, że w omawianym modelu można uzyskać prawie doskonałe ścieśnienie światła. Asymptotyczne zachowanie wariacji  $\langle(\Delta\hat{X}(\theta))^2\rangle$  i  $\langle(\Delta\hat{X}_-)^2\rangle$  dla dużych wartości  $x$  nie jest właściwe, gdyż przybliżenia wykorzystane w wyprowadzeniu wzorów (224) i (226) przestają być wówczas słuszne. W istocie, wykonane przez nas obliczenia numeryczne o



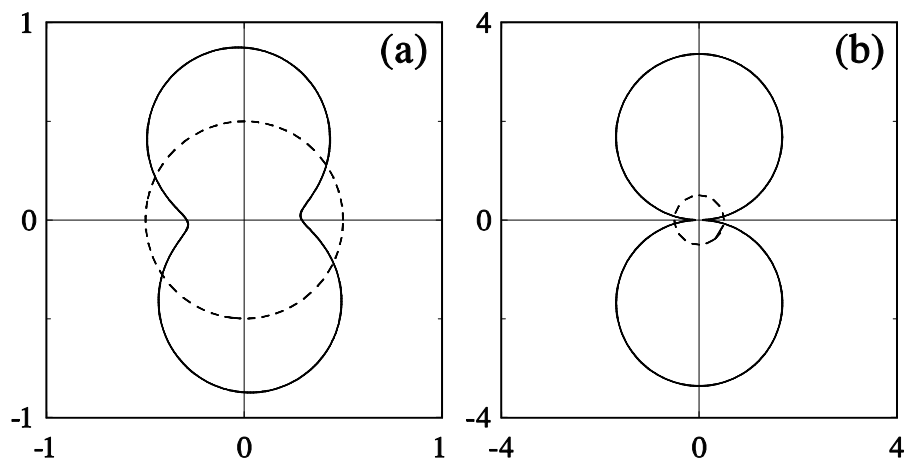
Rys. 8:

Wykresy wariancji minimalnej  $\langle (\Delta \hat{X}_-)^2 \rangle$  względem zmiennej  $x = |\alpha_0|^2 \tau$  dla kilku wartości  $|\alpha_0|^2$ : **(A)**  $|\alpha_0|^2 = 10^4$ ; **(B)**  $|\alpha_0|^2 = 10^5$ ; **(C)**  $|\alpha_0|^2 = 10^6$ ; **(D)**  $|\alpha_0|^2 = 10^7$ .

wysokiej precyzji z wykorzystaniem dokładnego wzoru (222) pokazują, że dla danego  $|\alpha_0|^2$  ( $|\alpha_0|^2 \gg 1$ ), wariancja  $\langle (\Delta \hat{X}_-)^2 \rangle$  osiąga minimum. Np. dla  $|\alpha_0|^2 \approx 10^7$  minimum występuje dla  $X_{min} \approx 10$ .

Na rys. 8 przedstawiliśmy  $\langle (\Delta \hat{X}_-)^2 \rangle$  (222) dla kilku wartości  $|\alpha_0|^2$ , aby pokazać położenia minimum. Nasze przybliżone wzory (224) i (226) są słuszne dla  $x$  mniejszych od  $x_{min}$ . To jest cena jaką musimy ponieść za uderzającą prostotę naszych wzorów. Wysoki stopień ścieśnienia można uzyskać, jak pokazali Tanaś i Kielich, w modelu dwumodowej propagacji. Wprowadzili oni termin samo-ścieśniania światła, aby określić ścieśnienie uzyskane m. in. w takim modelu. Znaczenie terminu *samo-ścieśnianie* bierze się z faktu, że silne pole optyczne rozchodzące się w nieliniowym ośrodku kerrowskim samo może ścisnąć swoje fluktuacje kwantowe.

Na rys. 9 przedstawiliśmy lemniskaty zdefiniowane równaniem (224). Wykreśliliśmy  $\frac{1}{2} \left[ \langle (\Delta \hat{X}(\theta))^2 \rangle \right]^{1/2}$  w układzie biegunowym dla wartości  $x$  odpowiadającym pierwszemu i drugiemu minimum wariancji  $\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle$ . Koło o średnicy jednostkowej oznacza fluktuacje próżni. Ścieśnianie pojawia się dla wszystkich wartości  $\theta$ , dla których lem-



Rys. 9:

Wykresy  $\frac{1}{2}[\langle(\Delta\hat{X}(\theta))^2\rangle]^{1/2}$  względem zmiennej  $\theta$  [zgodnie z (224)] dla (a)  $x = 0.59$  [pierwsze minimum  $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle$ ] i (b)  $x = 3.29$  [drugie minimum  $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle$ ]. Okrąg o średnicy jednostkowej opisuje fluktuacje próżni.

niskata leży wewnątrz koła fluktuacji próżni. Wysoki stopień ścieśnienia odpowiada małej wartości średnicy lemniskaty – co jest dobrze widoczne w drugim przypadku.

Wzór (224) zachowuje swoją postać nawet w przypadku uwzględnienia nieliniowości wyższego rzędu, z tym, że funkcje  $x$  i  $\phi(x)$  należy zmodyfikować. Pokazali to Tanaś i Kielich [225] wykorzystując metodę punktu siodłowego w celu wyznaczenia sum pojawiających się w dokładnych wyrażeniach na wariancje dla dużej liczby fotonów.

Momenty statystyczne liczby fotonów są oczywiście stałymi ruchu

$$\langle f[\hat{a}^+(t)\hat{a}(t)] \rangle = \langle f[\hat{a}^+(t_0)\hat{a}(t_0)] \rangle, \quad (230)$$

co bezpośrednio wynika z rozwiązania  $\hat{a}(t)$  (35).

Omawiane wariancje w przedstawieniu geometrycznym mają dwukrotną symetrię rotacyjną, jako odzwierciedlenie faktu, że wariancja tworzy eliptyczną lemniskatę Bootha w biegunowym układzie współrzędnych. Lemniskata jest krzywą spodkową<sup>31</sup> znanej elipsy ścieśnienia o wspólnych osiach głównych. Jest to geometryczna interpretacja ścieśnienia głównego – zwykle tłumaczonego przez nas ad sensum, jako ścieśnienie w osiach głównych. Taka interpretacja została podana przez Loudona [221]. Inną dogodną geometryczną reprezentacją zjawiska ścieśnienia są sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa (dla  $s \neq 1$ ), a w szczególności funkcja Wignera [221, 226] i funkcja  $Q$  [55]. Ograniczymy naszą uwagę jedynie do funkcji  $Q$ . Jest to tym bardziej uzasadnione, że nie ma jakościowych różnic między funkcjami  $Q$  i  $W$  w modelu oscylatora anharmonicznego dla  $\tau$  i  $|\alpha_0|$  tak dobranych, że spełniony jest warunek  $x = |\alpha_0|^2\tau \sim 1$ . Dla idealnych stanów ścieśnionych (26), przekroje funkcji  $Q$  są elipsami, które mogą być interpretowane jako równoważne eliptycznej krzywej spodkowej opisującej ścieśnienie w osiach głównych. Sytuacja znacznie się komplikuje w przypadku samo-ścieśnienia, np. ścieśnienia uzyskanego w modelu oscylatora anharmonicznego. Przekroje funkcji  $Q$  przestają być elipsami, a zatem utożsamianie ich z eliptyczną krzywą spodkową wariancji nie jest możliwe. Ten przypadek jest dobrze widoczny na rys. 4 wykreślonym dla  $\tau = 2\pi/8 \approx 0.79$  i  $|\alpha_0| = 2$ , gdzie przekrój funkcji  $Q$  w połowie jej wartości

---

<sup>31</sup>ang. pedal curve

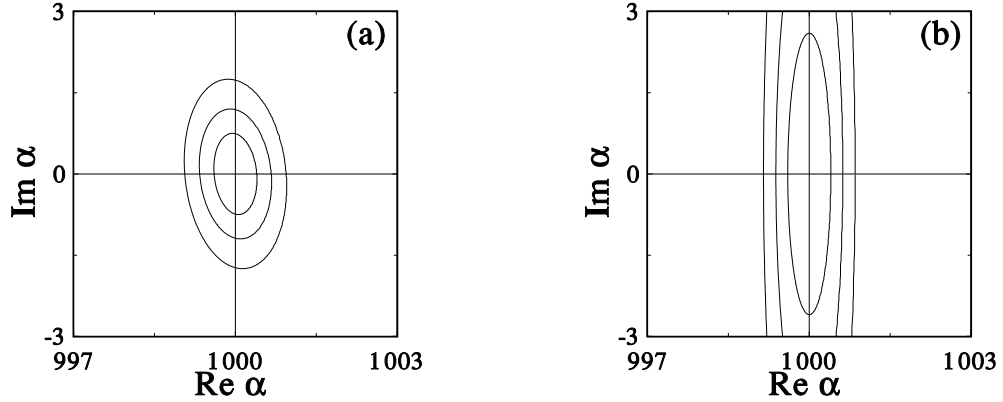
maksymalnej, wyznaczono ze wzoru (43). Kitagawa i Yamamoto [55] wprowadzili termin ścieśnianie sierpowe (ścieśnianie o kształcie sierpowym)<sup>32</sup>. Takie ścieśnianie jest opisane przekrojami funkcji  $Q$  w kształcie sierpów, w przeciwieństwie do typowego eliptycznego ścieśniania (tj. o eliptycznych przekrojach funkcji  $Q$ ) stanów (26). Przekroje sierpowe nie mają oczywiście dwukrotnej symetrii rotacyjnej, co oznacza, że pojęcie kierunku ścieśniania<sup>33</sup>, określonego poprzez nachylenie małej osi lemniskaty, nie może być jednoznacznie zdefiniowane na podstawie kształtu przekrojów funkcji  $Q$ . Jeśli liczba fotonów pola nie jest bardzo duża, ścieśnienie operatorów kwadraturowych nie jest szczególnie widoczne. Jednak, jak pokazali Tanaś i Kielich [51, 52, 176], wysoki stopień ścieśnienia może być uzyskany dla dużej liczby fotonów. Niestety, bezpośrednia analiza numeryczna funkcji  $Q$  na podstawie wzoru (43) jest niemożliwa dla  $|\alpha_0|^2 \gg 1$ . W tym przypadku należy zastosować metodę punktu siodłowego, aby wyznaczyć sumy pojawiające się w (43). Stosując tę metodę wyprowadziliśmy w §2.2 przybliżony wzór (61) na funkcję  $Q$ , który umożliwia analizę numeryczną QPD w przypadku  $\tau \ll 1$  i  $|\alpha_0| \gg 1$ . Oczywiście, takiej analizy nie można przeprowadzić korzystając bezpośrednio z (43).

Na rys. 10 przedstawiliśmy przekroje funkcji  $Q$  wyliczone z naszych wzorów (61), (58) i (59) dla parametrów  $\tau$  i  $|\alpha_0|$  wybranych w taki sposób, aby otrzymać  $x = |\alpha_0|^2 \tau$  równe pierwszemu i drugiemu minimum wariancji  $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle$ . Odpowiednie przekroje mają w pełni regularne kształty eliptyczne, które raczej opisują zwykłe ścieśnianie (26), a nie ścieśnianie sierpowe – uzyskane dla małej liczby fotonów. Dla pierwszego minimum uzyskuje się ścieśnienie w 66%. Na rys. 10(a) widać, że elipsy są w małym stopniu nachylone względem układu współrzędnych. Drugie minimum odpowiada ścieśnieniu 98%. Na rys. 10(b) elipsy są o wiele bardziej ściśnięte niż na rys. 10(a), a zarazem osie główne elips pokrywają się niemalże doskonale z układem współrzędnych. Zatem, w przypadku modelu oscylatora anharmonicznego o dużej liczbie fotonów i małym współczynniku anharmoniczności, funkcja  $Q$  może być uważana za dobrą reprezentację graficzną elipsy nieoznaczoności dla kwadraturowych operatorów pola. Ten eliptyczny

---

<sup>32</sup>ang. crescent squeezing, crescent-shaped squeezing

<sup>33</sup>ang. squeezing direction



Rys. 10:

Przekroje funkcji  $Q$  w płaszczyźnie zespolonej  $\alpha$  na wysokościach  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  i  $\frac{3}{4}$  wartości maksymalnej dla  $|\alpha_0|^2 = 10^6$  oraz **(a)**  $x = 0.59$  [pierwsze minimum  $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle$ ] i **(b)**  $x = 3.29$  [drugie minimum  $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle$ ].

kształt przekrojów funkcji  $Q$  nie oznacza jednakże zmiany natury stanu kwantowego pola, gdy  $|\alpha_0|^2$  jest duże. Raczej odzwierciedla fakt, że dla  $|\alpha_0| \gg 1$  kształt sierpowy jest mniej widoczny, ponieważ znaczące wartości niezerowe funkcji  $Q$  są rozłożone w pobliżu łuku o promieniu  $|\alpha_0|$ , co oznacza bardzo małą krzywiznę przekrojów w kształcie sierpów, gdy  $|\alpha_0| \gg 1$ .

Ogólnie mówiąc, rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa, a w szczególności funkcja  $Q$ , zawierają w sobie więcej informacji niż wariancja, która jest jedynie momentem statystycznym drugiego rzędu. Kształt przekrojów QPD może być o wiele bardziej skomplikowany niż elipsa, ponieważ niesie informację także o momentach statystycznych wyższego rzędu.

#### 4.2.2 Rozpraszanie ramanowskie

Rozpraszanie ramanowskie analizowane w §3.1.2 i §3.1.3 w przybliżeniu parametrycznym jest w pełni opisane przez  $s$ -sparametryzowaną funkcję charakterystyczną  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$  ( 83) lub przez  $s$ -sparametryzowany rozkład *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  ( 89) (o ile istnieje dla danego parametru  $s$ ). W szczególności, ko-



rzyszając z relacji przytoczonych na początku paragrafu 4.2, możemy uzyskać pełną informację na temat statystyki liczby fotonów oraz ścieśniania pól rozproszonych.

Rozkład prawdopodobieństwa liczby fotonów  $p(n)$  można wyliczyć z rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  (lub rozkładu intensywności  $\mathcal{W}^{(s)}(W, t)$ ) korzystając z uogólnionego równania fotodetekcji ( 196), lub równoważnie z funkcji tworzącej  $\langle \exp(-\lambda W(t)) \rangle_{(s)}$  ( 197) na mocy ( 198). Zastosujemy ostatnią metodę. Po wstawieniu  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A, t)$  ( 89), lub  $\mathcal{C}^{(s)}(\beta_S, \beta_A, t)$  ( 83), do ( 197) otrzymujemy następującą zależną od czasu  $s$ -parametryzowaną funkcję tworzącą:

$$\langle \exp(-\lambda W) \rangle_{(s)} = \lambda^{-2} (\mathcal{L}_1^{(s)})^{-1/2} \exp \left( \frac{\mathcal{L}_2^{(s)}}{\mathcal{L}_1^{(s)}} \right), \quad (231)$$

gdzie  $\mathcal{L}_1^{(s)}$  ( $\mathcal{L}_2^{(s)}$ ) są wielomianami 4 (3) rzędu względem  $\lambda^{-1}$ :

$$\mathcal{L}_1^{(s)} = \sum_{j=0}^4 \left( \lambda^{-1} + \frac{1-s}{2} \right)^j b_j, \quad (232a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(s)} = \sum_{j=0}^3 \left( \lambda^{-1} + \frac{1-s}{2} \right)^j a_j. \quad (232b)$$

Wzory ( 231) i ( 232a-b) są uogólnieniem na dowolne  $s$  wyników otrzymanych przez Peřinę i współpracowników [127, 24, 97] dla przypadku  $s = -1$ . Współczynniki  $a_j$  i  $b_j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) występujące w ( 232a-b), podamy w formie symetryzowanej:

$$\begin{aligned} a_0 = & \left[ -(B_S^{(s)} + \bar{s})(K_A^{(s)} + \bar{s}(2B_A^{(s)} + \bar{s})) \right. \\ & + (B_A^{(s)} + \bar{s})K_+ + (C_A D_{SA} \bar{D}_{AS} + \text{c.c.}) \left. \right] |\xi_S|^2 \\ & + \left\{ \left[ (B_A^{(s)} + \bar{s}) D_{SA} \bar{D}_{SA} + \frac{1}{2} \left( (C_S^* K_A^{(s)} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \bar{s} C_S^* (2B_A^{(s)} + \bar{s}) + C_A D_{SA}^2 + C_A^* \bar{D}_{SA}^2 \right) \right] \xi_S^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[ (B_S^{(s)} + \bar{s})(B_A^{(s)} + \bar{s}) D_{SA} + 2(B_S^{(s)} + \bar{s}) \right. \\ & \times C_A^* \bar{D}_{SA} + C_S^* C_A^* D_{SA}^* - D_{SA} K_- \left. \right] \xi_S \xi_A \\ & - \frac{1}{2} \left[ (B_S^{(s)} + \bar{s})(B_A^{(s)} + \bar{s}) \bar{D}_{SA} + 2(B_S^{(s)} + \bar{s}) C_A D_{SA} \right. \\ & \left. \left. + C_S^* C_A \bar{D}_{AS} + \bar{D}_{SA} K_- \right] \xi_S \xi_A^* + \text{c.c.} \right\} \\ & + [S \longleftrightarrow A], \end{aligned} \quad (233a)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -[2(B_S^{(s)} + \bar{s})(B_A^{(s)} + \bar{s}) + K_A^{(s)} - K_+ + \bar{s}(2B_A^{(s)} + \bar{s})]|\xi_S|^2 \\
&+ [((B_A^{(s)} + \bar{s})C_S^* + D_{SA}\bar{D}_{SA})\xi_S^2 + ((B_S^{(s)} + \bar{s})D_{SA} + C_S^*\bar{D}_{AS})\xi_S\xi_A \\
&- ((B_S^{(s)} + \bar{s})\bar{D}_{SA} + C_S^*D_{SA}^*)\xi_S\xi_A^* + \text{c.c.}] \\
&+ [S \longleftrightarrow A],
\end{aligned} \tag{233b}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= -(B_S^{(s)} + 2B_A^{(s)} + 3\bar{s})|\xi_S|^2 \\
&+ \frac{1}{2}(C_S^*\xi_S^2 + D_{SA}\xi_S\xi_A - \bar{D}_{SA}\xi_S\xi_A^* + \text{c.c.}) \\
&+ [S \longleftrightarrow A],
\end{aligned} \tag{233c}$$

$$a_3 = -|\xi_S|^2 - |\xi_A|^2, \tag{233d}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{2} \left( K_S^{(s)} + \bar{s}(2B_S^{(s)} + \bar{s}) \right) \left( K_A^{(s)} + \bar{s}(2B_A^{(s)} + \bar{s}) \right) - (B_S^{(s)} + \bar{s})(B_A^{(s)} + \bar{s})K_+ \\
&- 2(B_S^{(s)} + \bar{s})(C_A^*D_{SA}^*\bar{D}_{AS} + \text{c.c.}) + \frac{1}{2}K_-^2 \\
&- \frac{1}{2}[C_A(C_S D_{SA}^2 + C_S^* \bar{D}_{AS}^2) + \text{c.c.}] \\
&+ [S \longleftrightarrow A],
\end{aligned} \tag{234a}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2(B_S^{(s)} + \bar{s})(K_A^{(s)} - K_+ + \bar{s}(2B_A^{(s)} + \bar{s})) - 2(C_S D_{SA} \bar{D}_{SA} + \text{c.c.}) \\
&+ [S \longleftrightarrow A],
\end{aligned} \tag{234b}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= 2(B_S^{(s)} + \bar{s})(B_A^{(s)} + \bar{s}) + K_S^{(s)} - K_+ + \bar{s}(2B_A^{(s)} + \bar{s}) \\
&+ [S \longleftrightarrow A],
\end{aligned} \tag{234c}$$

$$b_3 = 2(B_S^{(s)} + B_A^{(s)} + 2\bar{s}) \tag{234d}$$

$$b_4 = 1, \tag{234e}$$

gdzie symbol  $[S \longleftrightarrow A]$  oznacza poprzednie człony, ale z zamienionymi wskaźnikami  $S$  i  $A$ . Dla prostoty w równaniach ( 233a-d) i ( 234a-e) przyjęliśmy, że  $\bar{s}$  równa się  $\frac{s-1}{2}$  oraz pominęliśmy w zapisie zależność od czasu. Widać, że równania ( 232a-b) przyjmują najprostszą postać dla operatorów pola uporządkowanych normalnie. Po podstawieniu

funkcji tworzącej ( 231) do wzorów ( 198) i ( 199) można otrzymać następujący rozkład prawdopodobieństwa liczby fotonów [128, 97]:

$$p(n, t) = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, k_4 \\ k_1+k_2+k_3+k_4=n}} \prod_{l=1}^4 \exp\left(-\frac{A_l}{1+\lambda_l}\right) \times \frac{\lambda_l^{k_l}}{(1+\lambda_l)^{k_l+1/2} \Gamma(k_l+1/2)} L_{k_l}^{-1/2} \left(\frac{-A_l}{\lambda_l(1+\lambda_l)}\right) \quad (235)$$

oraz momenty silniowe

$$\langle \hat{n}^k(t) \rangle_{(1)} = \langle W^k(t) \rangle_{(1)} = k! \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=k} \prod_{l=1}^4 \frac{\lambda_l^{k_l}}{\Gamma(k_l+1/2)} L_{k_l}^{-1/2} \left(-\frac{A_l}{\lambda_l}\right), \quad (236)$$

gdzie  $A_k$  zdefiniowano następująco

$$A_k = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^4 (\lambda_k^{-1} - \lambda_l^{-1})^{-1} \sum_{l=0}^3 a_l (-\lambda_k^{-1})^l \quad (237)$$

oraz  $\lambda_k$  są pierwiastkami  $\mathcal{L}_1^{(s)}$ . Wzory na dwu- i jednomodowe momenty  $\langle \hat{n}^k \rangle_{(1)}$  i rozkłady  $p(n, t)$  dla dowolnych pól początkowych oraz w kilku szczególnych sytuacjach (m.in. dla początkowej superpozycji stanów koherentnych i chaotycznych) otrzymali Peřinová i Peřina [127]. Niektóre nowe wyniki otrzymaliśmy w pracy [64].

Przy założeniu, że którekolwiek z rozproszonych pól (stokesowskie lub antystokesowskie) jest początkowo w stanie koherentnym (narzucając warunek  $C_K = 0$ ), średnie liczby fotonów  $\langle \hat{n}_k(t) \rangle$  dla  $k = S, A$  można zapisać:

$$\langle \hat{n}_k(t) \rangle = \langle W_k(t) \rangle_{(1)} = |\xi_k(t)|^2 + B_k^{(1)}(t), \quad (238)$$

lub w jawnej postaci

$$\langle \hat{n}_S(t) \rangle = |\xi_S|^2 \exp(\kappa_S \Delta t) + (\langle \hat{n}_V \rangle + 1)[\exp(\kappa_S \Delta t) - 1], \quad (239)$$

$$\langle \hat{n}_A(t) \rangle = |\xi_A|^2 \exp(-\kappa_A \Delta t) + \langle \hat{n}_V \rangle [1 - \exp(-\kappa_A \Delta t)], \quad (240)$$

Średni kwadrat liczby fotonów  $\langle \hat{n}_k^2(t) \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_k^2 \rangle &= \langle W_k^2 \rangle_{(1)} + \langle W_k \rangle_{(1)} \\ &= |\xi_k(t)|^4 + |\xi_k(t)|^2 (4B_k(t) + 1) + 2B_k^2(t) + B_k(t). \end{aligned} \quad (241)$$

Równania ( 238)–( 241) wyznaczyliśmy z ogólnego wzoru ( 236). Współczynnik korelacji drugiego rzędu ( 200) jest zatem równy:

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(2)}(t) &= B_k^{(1)}(t) \left[ |\xi_k(t)|^2 + B_k^{(1)}(t) \right]^{-1} \\ &\times \left\{ |\xi_k(t)|^2 \left[ |\xi_k(t)|^2 + B_k^{(1)}(t) \right]^{-1} + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (242)$$

Ścisłe rozwiązanie modelu ramanowskiego znalezione w §3.2.1 (zob. także uzupełnienie **C**) dla  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau)$ , (114) i (115), umożliwia numeryczną analizę wszystkich poszukiwanych wartości średnich:

$$\langle \hat{n}^k(t) \rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} n^k \rho_{n,m}(0, 0, t), \quad (243)$$

$$\langle \hat{m}^k(t) \rangle = \sum_{n,m} m^k \rho_{n,m}(0, 0, t), \quad (244)$$

$$\langle \hat{a}_L^{+k}(t) \rangle = \sum_{n,m} \left[ \frac{(n+k)!}{n!} \right]^{1/2} \rho_{n,m}(k, 0, t), \quad (245)$$

$$\langle \hat{a}_S^{+k}(t) \rangle = \sum_{n,m} \left[ \frac{(m+k)!}{m!} \right]^{1/2} \rho_{n,m}(0, k, t), \quad (246)$$

$$\langle \hat{a}_L^+(t) \hat{a}_S^+(t) \rangle = \sum_{n,m} [(n+1)(m+1)]^{1/2} \rho_{n,m}(1, 1, t), \quad (247)$$

$$\langle \hat{a}_L^+(t) \hat{a}_S(t) \rangle = \sum_{n,m} [(n+1)m]^{1/2} \rho_{n,m}(1, -1, t). \quad (248)$$

Aby przedstawić analityczne porównanie tego formalizmu z innymi, skorzystamy z naszego przybliżonego wzoru (128). W §3.2.2 pokazaliśmy, że momenty statystyczne liczby fotonów laserowych  $\langle f[\hat{n}(\tau)] \rangle$  ( 129), wyznaczone z rozwiązania (128), nie zależą od czasu. Momenty liczby fotonów stokesowskich  $\langle f[\hat{m}(\tau)] \rangle$  ( 129) łatwo wyliczyć z (128) (przy  $\nu = \mu = 0$ ). Przykładowo mamy:

$$\begin{aligned} \langle \hat{m}(\tau) \rangle &= \langle \hat{m} \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \exp(n\Delta\tau) \rho_n^L(0\tau_0) \\ &+ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \exp(n\Delta\tau) \rho_n^L(0\tau_0) - 1 \right), \end{aligned} \quad (249)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle &= (\langle \hat{m}^2 \rangle + 3\langle \hat{m} \rangle + 2) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(2n\Delta\tau) \rho_n^L(0\tau_0) \\ &\quad - 3(\langle \hat{m} \rangle + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(n\Delta\tau) \rho_n^L(0\tau_0) + 1,\end{aligned}\quad (250)$$

$$\langle \hat{m}(\tau) \hat{n}(\tau) \rangle = (\langle \hat{m} \rangle + 1) \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(n\Delta\tau) \rho_n^L(0\tau_0) - \langle \hat{n} \rangle. \quad (251)$$

Wzory ( 249) i ( 250) zostały podane przez Simaana [89]. Związek ( 249) jest uogólnieniem wzoru Shena [86]. Wszystkie trzy związki ( 249)–( 251) sprowadzają się do wyników Loudona [110] w szczególnym przypadku, gdy początkowo nie ma fotonów stokesowskich. Średnia całkowitej liczby fotonów w polach laserowym i stokesowskim nie jest stała, w przeciwieństwie do naszych wcześniejszych dokładnych wyników ( 111). Niemniej, na mocy przybliżenia silnego pola pompującego stwierdzamy, że zasada zachowaniu całkowitej liczby fotonów jest spełniona z dokładnością określoną przez przybliżenia (zamieszczone we wstępie §3.2.2).

Łatwo znaleźć interpretację fizyczną równania ( 249). Pierwszy człon ( 249) opisuje wzmocnienie początkowego pola stokesowskiego zawierającego  $\langle \hat{m} \rangle$  fotonów w chwili  $\tau_0$ . To wzmocnienie może być rozumiane jako wymuszone zjawisko ramanowskie (emisja wymuszona). Drugi człon ( 249) opisuje wzmocnienie fluktuacji próżni, co można interpretować jako spontaniczne zjawisko ramanowskie (emisja spontaniczna). Zauważmy, że w modelu rozpraszania na kryształach w zerowej temperaturze ma również miejsce emisja spontaniczna.

Współczynniki korelacji  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  ( 200) i  $g_{LS}^{(2)}(\tau)$  ( 202) otrzymaliśmy ze wzorów ( 249)–( 251) i mogą być porównane explicite ze współczynnikami wyznaczonymi innymi metodami. Przy założeniu, że w pierwotnej wiązce stokesowskiej nie ma fotonów  $\langle \hat{m} \rangle = \langle \hat{m}^2 \rangle = 0$ , znajdujemy krótkoczasowe rozwinięcia funkcji wykładniczych pojawiających się we wzorach ( 249)–( 251). Po przekształceniach otrzymujemy proste wyrażenia na współczynniki korelacji

$$\gamma_S^{(2)}(\tau) = 2\gamma_L^{(2)} + 1 + 2(\langle \hat{n}^3 \rangle - \langle \hat{n}^2 \rangle^2 / \langle \hat{n} \rangle) \langle \hat{n} \rangle^{-2} \Delta\tau, \quad (252)$$

$$g_{LS}^{(2)}(\tau) = \gamma_L^{(2)} + (\langle \hat{n}^3 \rangle - \langle \hat{n}^2 \rangle^2 / \langle \hat{n} \rangle) \langle \hat{n} \rangle^{-2} \Delta\tau / 2. \quad (253)$$

Te same relacje ( 252) i ( 253) mogą być wyznaczone z wyrażen ( E.6) i ( E.10) rozwiniętych względem  $\Delta\tau$  dla krótkich czasów ewolucji, jeśli tylko pominiemy wyrażenia  $1/\langle\hat{n}\rangle$  i  $\langle\hat{n}^2\rangle/\langle\hat{n}\rangle^2$  w członach proporcjonalnych do  $\Delta\tau$ . Te człony są o wiele mniejsze od  $\langle\hat{n}^3\rangle/\langle\hat{n}\rangle^2$  i  $\langle\hat{n}^2\rangle^2/\langle\hat{n}\rangle^3$ . Simaan również otrzymał przybliżone wzory na  $g_{LS}^{(2)}(\tau)$  (32) i  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  (33) w artykule [89]. Aby je porównać z naszymi relacjami ( 252) i ( 253) należy je zapisać w naszej notacji, tzn. na mocy definicji ( 202) i ( 200) przesunąć wartości współczynników o  $-1$ . Wzory Simaana znacznie różnią się od naszych przybliżonych i ścisłych wyników. Przypuszczamy, że autor pracy [89] popełnił błąd algebraiczny w obliczeniach lub błąd metodologiczny nie licząc  $\langle\hat{m}(\tau)\rangle$  z dokładnością do  $(\Delta\tau)^3$  (konieczność przyjęcia takiej dokładności wyjaśniliśmy w uzupełnieniu **E**).

Rozwiązania ( 132) lub ( 135) pól będących w stanie superpozycji pól koherentnych i chaotycznych umożliwiają w prosty sposób wyznaczenie współczynników korelacji. Moment statystyczny liczby fotonów  $\langle\hat{m}^r(\tau)\rangle$  może być wyznaczony ze wzoru rekurencyjnego [136]:

$$\begin{aligned} \langle m^{r+1}(\tau) \rangle &= \langle m_{ch}(\tau) \rangle (\langle m_{ch}(\tau) \rangle + 1) \frac{\partial \langle m^r(\tau) \rangle}{\partial \langle m_{ch}(\tau) \rangle} \\ &+ \langle m_c(\tau) \rangle (2\langle m_{ch}(\tau) \rangle + 1) \frac{\partial \langle m^r(\tau) \rangle}{\partial \langle m_c(\tau) \rangle} + \langle m^r(\tau) \rangle \langle m(\tau) \rangle, \end{aligned} \quad (254)$$

gdzie

$$\langle \hat{m}(\tau) \rangle = \langle \hat{m}_c(\tau) \rangle + \langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle, \quad (255)$$

lub z wyrażenia w jawnej postaci [137, 24]:

$$\langle m^r(\tau) \rangle = r! \langle m_{ch}^r(\tau) \rangle L_r \left( -\frac{\langle m_c(\tau) \rangle}{\langle m_{ch}(\tau) \rangle} \right). \quad (256)$$

Średnie wartości  $\langle \hat{m}_c(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle$  zdefiniowaliśmy wcześniej wzorami ( 133) i ( 134). Wyrażenia ( 254) lub ( 256) umożliwiają obliczenie współczynników korelacji dowolnego rzędu. W szczególności, współczynnik drugiego rzędu ma postać

$$\gamma_S^{(2)}(\tau) = 1 - \left( \frac{\langle m_c(\tau) \rangle}{\langle m(\tau) \rangle} \right)^2, \quad (257)$$

przyjmujący wartość minimalną równą zero w chwili początkowej  $\tau_0$ , gdyż tylko wtedy  $\langle \hat{m}_{ch}(\tau) \rangle = 0$ .

Dla porównania wartości oczekiwanych otrzymanych dla modelu przedstawionego w §3.1.2 i w §3.2.2 załóżmy, że pola: laserowe i stokesowskie są początkowo w stanach koherentnych  $|\alpha_L\rangle$  i  $|\alpha_S\rangle$ . Po zsumowaniu wyrażeń w (249)–(251) z koherentną funkcją wagową  $\rho_n^L(0\tau_0)$  otrzymujemy:

$$\langle \hat{m}(\tau) \rangle = (|\alpha_S|^2 + 1) \exp[|\alpha_L|^2(e^{\Delta\tau} - 1)] - 1, \quad (258)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{m}^2(\tau) \rangle &= (|\alpha_S|^4 + 4|\alpha_S|^2 + 2) \exp[|\alpha_L|^2(e^{2\Delta\tau} - 1)] \\ &\quad - 3(|\alpha_S|^2 + 1) \exp[|\alpha_L|^2(e^{\Delta\tau} - 1)] + 1, \end{aligned} \quad (259)$$

$$\langle \hat{m}(\tau)\hat{n}(\tau) \rangle = |\alpha_L|^2(|\alpha_S|^2 + 1) \exp[|\alpha_L|^2(e^{\Delta\tau} - 1) + \Delta\tau] - |\alpha_L|^2. \quad (260)$$

W metodzie FPE otrzymaliśmy wyrażenia na  $\langle \hat{m}(\tau) \rangle$  (238) i  $\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle$  (241). Stosując notację przyjętą w paragrafie 3.3:  $\kappa_{st} = |e_L|^2 \gamma_{st} = |\alpha_L|^2 \tau$  oraz założywszy, że średnia liczba fononów jest zerem, wzory (238) i (241) redukują się do

$$\langle \hat{m}(\tau) \rangle = (|\alpha_S|^2 + 1) \exp(|\alpha_L|^2 \Delta\tau) - 1, \quad (261)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{m}^2(\tau) \rangle &= (|\alpha_S|^4 + 4|\alpha_S|^2 + 2) \exp(2|\alpha_L|^2 \Delta\tau) \\ &\quad - 3(|\alpha_S|^2 + 1) \exp(|\alpha_L|^2 \Delta\tau) + 1. \end{aligned} \quad (262)$$

Zauważmy również, że zachodzi

$$\langle \hat{m}(\tau)\hat{n}(\tau) \rangle = \langle \hat{m}(\tau) \rangle \langle \hat{n} \rangle. \quad (263)$$

W krótkich czasach ewolucji  $\Delta\tau \ll 1$  dla wiązki laserowej o dużej intensywności ( $|\alpha_L|^2 \gg 1$ ), równania (258), (259) i (260) przechodzą odpowiednio w (261), (262) i (263). Tak jest rzeczywiście, gdyż krótkoczasowe rozwinięcia (258) i (259) są następujące:

$$\begin{aligned} \langle \hat{m}(\tau) \rangle &= |\alpha_S|^2 + |\alpha_L|^2(1 + |\alpha_S|^2)\Delta\tau \\ &\quad + |\alpha_L|^2(|\alpha_L|^2 + 1)(1 + |\alpha_S|^2) \frac{(\Delta\tau)^2}{2}, \end{aligned} \quad (264)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle &= |\alpha_S|^2(1 + |\alpha_S|^2) + |\alpha_L|^2(1 + 5|\alpha_S|^2 + 2|\alpha_S|^4)\Delta\tau \\ &\quad + |\alpha_L|^2(|\alpha_L|^2 + 1)(5 + 13|\alpha_S|^2 + 4|\alpha_S|^4)\frac{(\Delta\tau)^2}{2},\end{aligned}\quad (265)$$

podczas gdy równania ( 261) i ( 262) (dla modelu z §3.1.2) redukują się odpowiednio do:

$$\begin{aligned}\langle \hat{m}(\tau) \rangle &= |\alpha_S|^2 + |\alpha_L|^2(1 + |\alpha_S|^2)\Delta\tau \\ &\quad + |\alpha_L|^4(1 + |\alpha_S|^2)\frac{(\Delta\tau)^2}{2},\end{aligned}\quad (266)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle &= |\alpha_S|^2(1 + |\alpha_S|^2) + |\alpha_L|^2(1 + 5|\alpha_S|^2 + 2|\alpha_S|^4)\Delta\tau \\ &\quad + |\alpha_L|^4(5 + 13|\alpha_S|^2 + 4|\alpha_S|^4)\frac{(\Delta\tau)^2}{2},\end{aligned}\quad (267)$$

Widać, że dla intensywnego pola pompującego, ( 264) przechodzi w ( 266), a ( 265) w ( 267), jeśli tylko wstawimy  $|\alpha_L|^2(|\alpha_L|^2 + 1) \approx |\alpha_L|^4$ . Zatem, współczynnik korelacji

$$\begin{aligned}\gamma_S^{(2)}(\tau) &= 2|\alpha_L|^2|\alpha_S|^{-2}\Delta\tau - [|\alpha_L|^2(3 + |\alpha_S|^2) \\ &\quad - |\alpha_S|^4 - 5|\alpha_S|^2 - 2]|\alpha_L|^2|\alpha_S|^{-4}(\Delta\tau)^2,\end{aligned}\quad (268)$$

wyznaczony z ( 264) i ( 265) dla  $\alpha_S \neq 0$  i  $\alpha_L \gg 0$ , przechodzi w

$$\gamma_S^{(2)}(\tau) = 2|\alpha_L|^2|\alpha_S|^{-2}\Delta\tau - (3 + |\alpha_S|^2)|\alpha_L|^4|\alpha_S|^{-4}(\Delta\tau)^2 \quad (269)$$

obliczony z ( 266) i ( 267). Jeśli w chwili  $\tau_0$  nie ma fotonów stokesowskich, to otrzymujemy następujące współczynniki korelacji

$$\gamma_S^{(2)}(\tau) = 1 + 2|\alpha_L|^{-2} + 2\Delta\tau + \left(2 + \frac{5}{6}|\alpha_L|^2\right) (\Delta\tau)^2, \quad (270)$$

$$\gamma_S^{(2)}(\tau) = 1, \quad (271)$$

odpowiednio w ramach formalizmów z §3.1.2 i §3.2.2. Różnice między współczynnikami korelacji  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  są bardziej widoczne w przypadku gdy  $\alpha_S = 0$ , gdyż w wyprowadzeniu ( 270) korzystaliśmy z rozwinięć  $\langle \hat{m}(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle$  z dokładnością do  $(\Delta\tau)^3$  (konieczność przyjęcia takiej dokładności obliczeń uzasadnimy w uzup. **E**). Zgodnie z naszymi przewidywaniami, współczynnik korelacji wzajemnej  $g_{LS}^{(2)}(\tau)$  ( 202) znika dla pól



w modelu z §3.1.2. Natomiast krótkoczasowe rozwinięcia  $g_{LS}^{(2)}(\tau)$ , otrzymane na mocy (258)–(260), wynoszą: (i) dla  $\alpha_S \neq 0$

$$g_{LS}^{(2)}(\tau) = (1 + |\alpha_S|^{-2})\Delta\tau - (1 + |\alpha_S|^2)(2|\alpha_L|^2 - |\alpha_S|^2)|\alpha_S|^{-4}\frac{(\Delta\tau)^2}{2}, \quad (272)$$

a (ii) dla  $\alpha_S = 0$

$$g_{LS}^{(2)}(\tau) = |\alpha_L|^{-2} + \frac{1}{2}\Delta\tau + \frac{1}{12}(|\alpha_L|^2 + 3)\frac{(\Delta\tau)^2}{2}. \quad (273)$$

Jak pokazaliśmy dwa pozornie różne formalizmy z §3.1 w języku  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa i funkcji charakterystycznych oraz z §3.2 w terminach elementów macierzowych w reprezentacji fokowskiej, prowadzą do podobnych wyników dla pola stokesowskiego.

Omówimy teraz możliwości ścieśnienia jedno- i dwumodowych pól w modelu ramanowskim. Nasze wyniki są uogólnieniem wzorów Kárskiej i Peřiny [97] (także [24]) na dowolnie  $s$ -sparametryzowane funkcje. Korzystając z definicji (82a-e) określającej funkcje  $B_k^{(s)}(t)$ ,  $D_{kl}(t)$ ,  $\bar{D}_{kl}(t)$  i  $C_k(t)$  w prosty sposób otrzymujemy wyrażenia na momenty statystyczne operatorów  $\hat{X}_k$  i  $\hat{X}_{kl}$ :

$$\langle(\Delta\hat{X}_{k1,k2})^2\rangle = \pm 2\text{Re } C_k(t) + 2B_k^{(s)}(t) + s, \quad (274)$$

$$\langle(\Delta\hat{X}_{k\pm})^2\rangle = \pm 2|C_k(t)| + 2B_k^{(s)}(t) + s, \quad (275)$$

$$\langle\{\Delta\hat{X}_{k1}, \Delta\hat{X}_{k2}\}\rangle = 4\text{Im } C_k(t), \quad (276a)$$

$$\langle\Delta\hat{X}_{k1}\Delta\hat{X}_{l1}\rangle = 2\text{Re } [D_{kl}(t) - \bar{D}_{kl}(t)], \quad (276b)$$

$$\langle\Delta\hat{X}_{k2}\Delta\hat{X}_{l2}\rangle = -2\text{Re } [D_{kl}(t) + \bar{D}_{kl}(t)], \quad (276c)$$

$$\langle\Delta\hat{X}_{k1}\Delta\hat{X}_{l2}\rangle = 2\text{Im } [D_{kl}(t) - \bar{D}_{kl}(t)], \quad (276d)$$

$$\langle\Delta\hat{X}_{k2}\Delta\hat{X}_{l1}\rangle = 2\text{Im } [D_{kl}(t) + \bar{D}_{kl}(t)], \quad (276e)$$

gdzie jak zwykle  $k, l = S, A$ ,  $k \neq l$  oraz  $s \in \langle -1, 1 \rangle$ . Po podstawieniu otrzymujemy wyrażenia na dwumodowe wariancje dla  $\hat{X}_{SA1,2}$ :

$$\left. \begin{aligned} \langle (\Delta \hat{X}_{SA1})^2 \rangle \\ \langle (\Delta \hat{X}_{SA2})^2 \rangle \end{aligned} \right\} = \pm 2 \operatorname{Re} [C_S(t) + C_A(t) + 2D_{SA}(t)] + 2 \left[ B_S^{(s)}(t) + B_A^{(s)}(t) - 2 \operatorname{Re} \bar{D}_{SA}(t) + s \right], \quad (277)$$

i wyrażenia na dwumodowe wariancje ekstremalne:

$$\langle (\Delta \hat{X}_{SA\pm})^2 \rangle = \pm 2 |C_S(t) + C_A(t) + 2D_{SA}(t)| + 2 \left[ B_S^{(s)}(t) + B_A^{(s)}(t) - 2 \operatorname{Re} \bar{D}_{SA}(t) + s \right]. \quad (278)$$

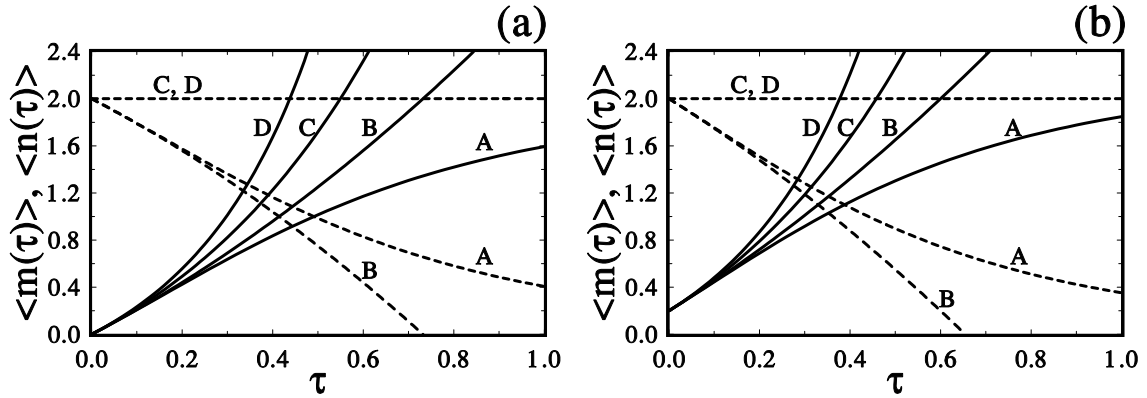
Ścieśnienie pól jednomodowych w zwykłym sensie oraz ścieśnienie w osiach głównych występuje odpowiednio wtedy, gdy:

$$\left. \begin{aligned} |\operatorname{Re} C_k(t)| \\ |C_k(t)| \end{aligned} \right\} > B_k^{(s)}(t) + \frac{s}{2} \quad (k = S, A), \quad (279)$$

natomiast warunki na ścieśnienie (zwykle i w osiach głównych) pól dwumodowych mają postać:

$$\left. \begin{aligned} |\operatorname{Re}[C_S(t) + C_A(t) + 2D_{SA}(t)]| \\ |C_S(t) + C_A(t) + 2D_{SA}(t)| \end{aligned} \right\} > B_S^{(s)}(t) + B_A^{(s)}(t) - 2 \operatorname{Re} \bar{D}_{SA}(t) + s. \quad (280)$$

Na rys. 11–18 porównaliśmy różne momenty statystyczne wielkości opisujących pola stokesowskie i laserowe, mianowicie: średnie liczby fotonów  $\langle \hat{m}(\tau) \rangle$  (linie ciągłe) i  $\langle \hat{n}(\tau) \rangle$  (linie przerywane) na rys. 11; średnie kwadratu liczby fotonów  $\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle$  (linie ciągłe) i  $\langle \hat{n}^2(\tau) \rangle$  (linie przerywane) na rys. 12; znormalizowane współczynniki korelacji drugiego rzędu  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  (rys. 15) i  $\gamma_L^{(2)}(\tau)$  (rys. 16) oraz współczynnik korelacji wzajemnej  $g_{LS}^{(2)}(\tau)$  (rys. 17); średnie amplitudy pól  $\langle \hat{a}_S(\tau) \rangle$  (linie ciągłe) i  $\langle \hat{a}_L(\tau) \rangle$  (linie przerywane) na rys. 13; wartości średnie kwadratu amplitud pól  $\langle \hat{a}_S^2(\tau) \rangle$  (linie ciągłe) i  $\langle \hat{a}_L^2(\tau) \rangle$  (linie przerywane) na rys. 14; wariancje ekstremalne operatorów kwadraturowych  $\langle (\Delta X_{S\pm}(\tau))^2 \rangle$  na rys. 18 i  $\langle (\Delta X_{L\pm}(\tau))^2 \rangle$  na rys. 19. Wielkości te wyznaczono korzystając z różnych opisów rozpraszania ramanowskiego przy zastosowaniu odmiennych przybliżeń: (i) krzywe A są wyznaczone ze ścisłego rozwiązania (tj. bez przybliżenia parametrycznego, ani przybliżenia krótkich czasów) w modelu przedstawionym w §3.2.1 i w uzupełnieniu C;

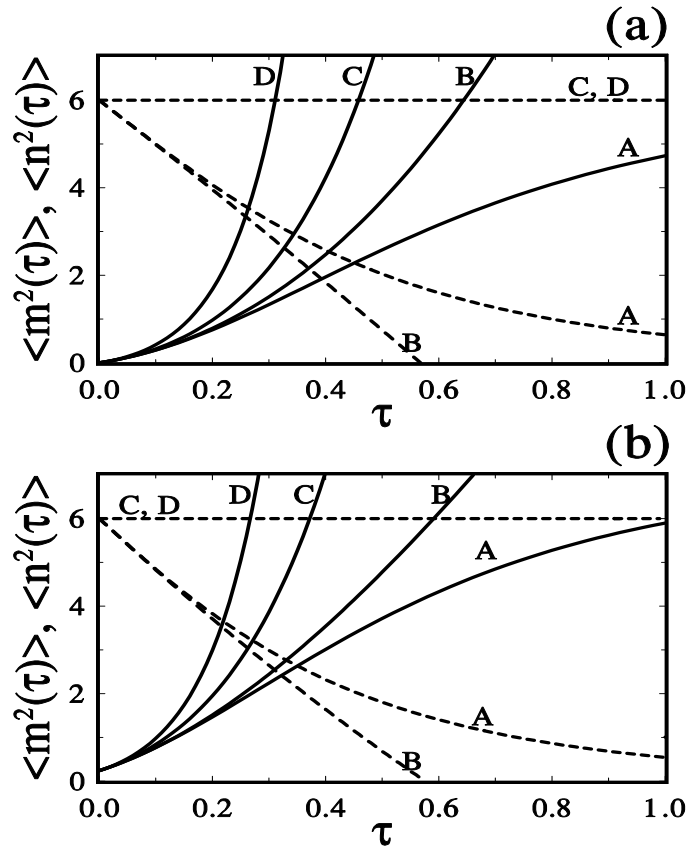


Rys. 11:

Ewolucja średniej liczby fotonów stokesowskich  $\langle \hat{m}(t) \rangle$  (linie ciągłe) oraz fotonów laserowych  $\langle \hat{n}(t) \rangle$  (linie przerywane) dla pól początkowo koherentnych: **(a)**  $|\alpha_L = \sqrt{2}\rangle, |\alpha_S = 0\rangle$  oraz **(b)**  $|\alpha_L = \sqrt{2}\rangle, |\alpha_S = \sqrt{0.2}\rangle$ . Wyniki numeryczne otrzymane w oparciu o dokładne rozwiązanie z §3.2.1 (krzywe A); rozwiązania w przybliżeniu krótkich czasów w uzup. **E** (krzywe B); rozwiązania w przybliżeniu parametrycznym z §3.1.2 (krzywe C) oraz rozwiązania z §3.2.2 (krzywe D).

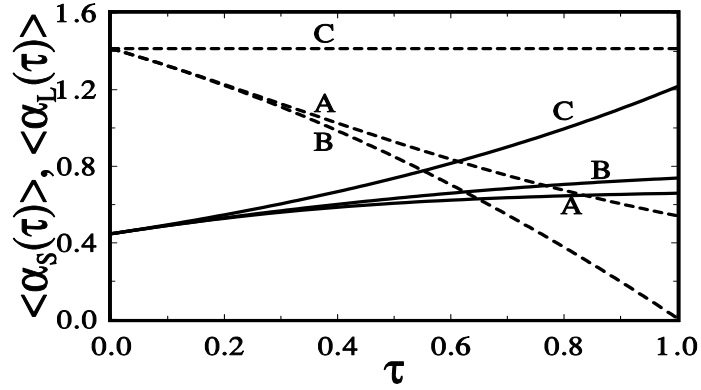
(ii) krzywe B obrazują rozwiązania w przybliżeniu krótkich czasów (uzupełnienie **E**);  
 (iii) krzywe C przedstawiają rozwiązania w przybliżeniu parametrycznym w ramach formalizmu sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa §3.1.2 i §4.2.2; w końcu (iv) krzywe D przedstawiają rozwiązania w przybliżeniu parametrycznym w ramach formalizmu macierzy gęstości w reprezentacji fokowskiej (§3.2.2).

Krzywe przedstawione na wykresach wykreślono przy założeniu, że pole stokesowskie jest początkowo w stanie koherentnym (można wówczas mówić o wymuszonym zjawisku ramanowskim) lub w stanie próżni (wtedy występuje spontaniczne zjawisko ramanowskie). Przeskalowany czas  $\tau$  jak zwykle zdefiniowaliśmy przez  $t \rightarrow \tau = t\gamma_S$ . Pominęto rozpraszanie antystokesowskie. Termostat jest w tak niskiej temperaturze, że przyjęliśmy  $\langle \hat{n}_V \rangle = 0$ . Wybraliśmy stosunkowo małą liczbę fotonów laserowych ( $|\alpha_L|^2 = 2$ ), aby uniknąć problemów numerycznych, jak również, aby nasze wyniki można było bezpośrednio porównać z wynikami Simaana [89] i innych. Oczywiście, zdajemy sobie sprawę, że stosowanie przybliżenia parametrycznego dla takiej wartości



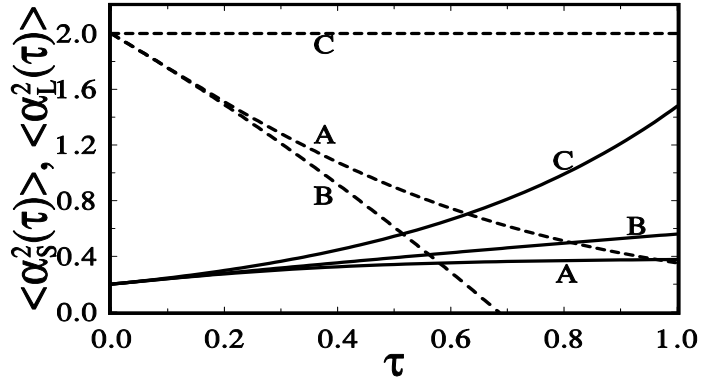
Rys. 12:

Ewolucja kwadratu średniej liczby fotonów stokesowskich  $\langle \hat{m}^2(t) \rangle$  (linie ciągłe) i laserowych  $\langle \hat{n}^2(t) \rangle$  (linie przerywane) dla tych samych przypadków co na rys. 11.



Rys. 13:

Ewolucja wartości oczekiwanych amplitud pól: stokesowskiego  $\langle \hat{a}_S(\tau) \rangle \equiv \langle \alpha_S(\tau) \rangle$  (linie ciągłe) i laserowego  $\langle \hat{a}_L(\tau) \rangle \equiv \langle \alpha_L(\tau) \rangle$  (linie przerywane) dla pól początkowo koherentnych  $|\alpha_L = \sqrt{2}\rangle$  oraz  $|\alpha_S = \sqrt{0.2}\rangle$ . Krzywe A, B, C są wyznaczone odpowiednio w ramach formalizmów z §3.2.1, uzup. E i §3.1.2.



Rys. 14:

Ewolucja wartości oczekiwanych kwadratów amplitud pól:  $\langle \hat{a}_S^2(\tau) \rangle \equiv \langle \alpha_S^2(\tau) \rangle$  (linie ciągłe) oraz  $\langle \hat{a}_L^2(\tau) \rangle \equiv \langle \alpha_L^2(\tau) \rangle$  (linie przerywane) dla tych samych przypadków co na rys. 13.

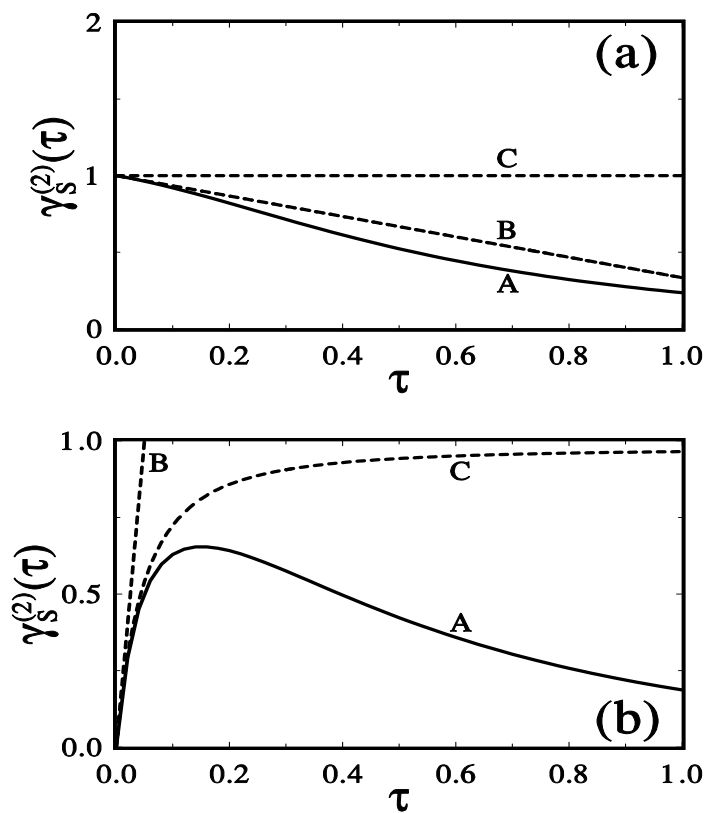
$|\alpha_L|^2$  ma ograniczony sens fizyczny.

Na rys. 11, 12, 13 i 14 pokazaliśmy, że w krótkich czasach ewolucji rozwiązania przybliżone (krzywe B, C i D) są zgodne z rozwiązaniem ścisłym (krzywa A). Rachunkowo udowodniliśmy, że nasze rozwiązania dla pola stokesowskiego przedstawione w paragrafach 3.1.1–3.1.3, 3.2.2 i 4.2.2 oraz uzupełnieniach **C** i **E** są równoważne, jeśli założyć, że pole pompujące jest o dużej intensywności oraz, że badamy krótkie czasy ewolucji układu. Niemniej, widać z rysunków, że relacje wyprowadzone w uzupełnieniu **E** są najlepszym, podczas gdy wzory z §3.2.2 są najgorszym przybliżeniem rozwiązania ścisłego z §3.2.1 dla pola pompującego o małej intensywności.

Nie obserwuje się czasowej zależności wartości średnich  $\langle \hat{n}(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{n}^2(\tau) \rangle$  oraz  $\langle \hat{a}_L(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{a}_L^2(\tau) \rangle$  wyznaczonych w ramach formalizmów z §3.1.2 i §3.2.2, stąd otrzymujemy linie proste C i D na rys. 11–14.

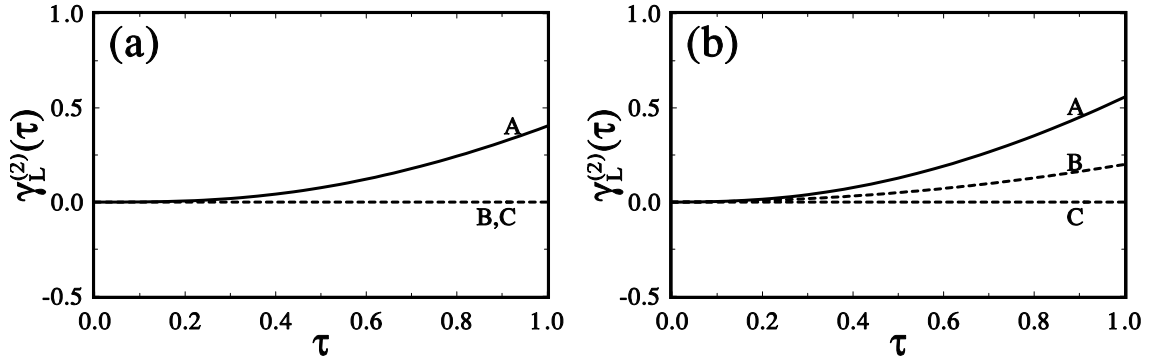
Na rys. 15 (krzywa A) pokazujemy, że fluktuacje liczby fotonów pola stokesowskiego zmieniają się od początkowo chaotycznych do asymptotycznie poissonowskich (gdy  $\langle \hat{m}(\tau) \rangle = 0$  i  $\langle \hat{n}(\tau) \rangle = |\alpha_L|^2$ ), lub od fluktuacji poissonowskich poprzez superpoissonowskie, do ponownie poissonowskich dla długich czasów ewolucji (jeśli  $\langle \hat{m}(\tau) \rangle = |\alpha_S|^2 \neq 0$  i  $\langle \hat{n}(\tau) \rangle = |\alpha_L|^2$ ). Asymptyczne zachowanie współczynników  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  uzasadniliśmy w §3.2.1. W krótkich czasach, ewolucja współczynników  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  dla rozpraszania hyperramanowskiego [118] jest podobna do przedstawionej na rys. 15 w modelu rozpraszania ramanowskiego. Jednak dla długich czasów ewolucji, fluktuacje liczby fotonów w polu stokesowskim w rozpraszaniu hyperramanowskim są opisane rozkładem subpoissonowskim [118, 64].

Na rys. 16 widać, że współczynniki korelacji  $\gamma_L^{(2)}(\tau)$  dla pola laserowego jedynie w chwili początkowej  $\tau_0$  są opisane rozkładem poissonowskim, natomiast dla  $\tau > \tau_0$  – rozkładem superpoissonowskim. Różnice we współczynnikach  $\gamma_L^{(2)}(\tau)$  przedstawionych na rys. 16a (pole laserowe w spontanicznym rozpraszaniu ramanowskim), a na rys. 16b (pole laserowe w wymuszonym rozpraszaniu ramanowskim) są jedynie ilościowe, w przeciwieństwie do współczynników  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  dla pola stokesowskiego przedstawionych na rys. 15a i 15b, gdzie różnice mają charakter jakościowy. Uzasadnienie podaliśmy



Rys. 15:

Ewolucja znormalizowanych momentów silniowych (współczynników korelacji)  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  dla pola stokesowskiego w tych samych przypadkach co na rys. 11.



Rys. 16:

Jak na rys. 15, ale dla znormalizowanych momentów silniowych  $\gamma_L^{(2)}(\tau)$  dla pola laserowego.

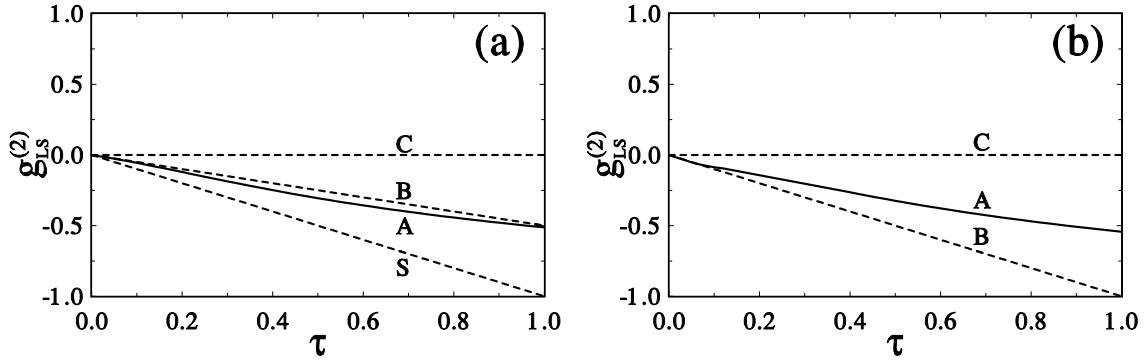
w uzupełnieniu **E**. Na marginesie zaznaczamy, że w rozpraszaniu hyperramanowskim fluktuacje w początkowo koherentnym polu laserowym stają się subpoissonowskie dla  $\tau > \tau_0$  [118].

Ewolucję współczynników korelacji wzajemnej  $g_{LS}^{(2)}(\tau)$  przedstawiliśmy na rys. 17a i 17b. Jak widać, rozkład początkowo poissonowski przechodzi w subpoissonowski. Krzywa A na rys. 17a odpowiada ścisłemu rozwiązaniu Simaana.

Znormalizowane współczynniki korelacji  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  wyznaczone z ( 268) i ( 270),  $\gamma_L^{(2)}(\tau) = const$  oraz  $g_{LS}^{(2)}(\tau)$  obliczone z ( 272) i ( 273) znacznie odbiegają od wyników ścisłych, gdy wybierze się stosunkowo małą liczbę fotonów laserowych (np.  $|\alpha_L|^2 = 2$ ). Dlatego tych wyników (obrazowanych zwykle krzywymi D) nie przedstawiliśmy na rys. 15–17.

Badaliśmy statystykę liczby fotonów stokesowskich i laserowych pod kątem możliwości pojawienia się rozkładów subpoissonowskich lub superpoissonowskich. Nie analizowaliśmy efektów grupowania i rozgrupowania fotonów. Omówienie tych zjawisk w naszym modelu rozpraszania ramanowskiego nie stwarza większego problemu. Wyniki przedstawimy gdzie indziej. Zwróćmy jedynie uwagę na różnicę między terminami: „statystyka subpoissonowska liczby fotonów” i „rozgrupowanie fotonów” [227, 228].



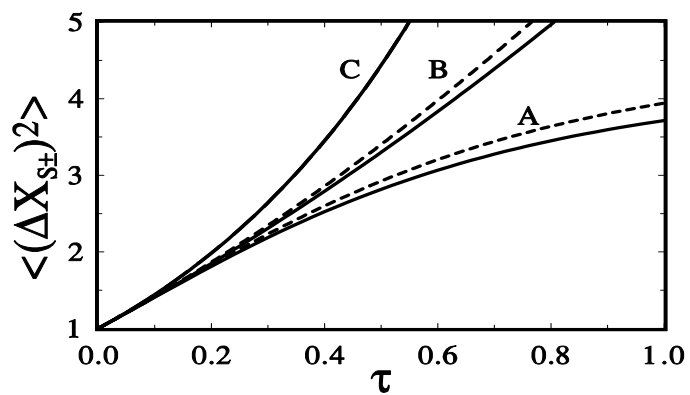


Rys. 17:

Jak na rys. 15, ale dla znormalizowanych mieszanych momentów silniowych (współczynników korelacji wzajemnej)  $g_{LS}^{(2)}(\tau)$ . Dodatkową krzywą S wyznaczono w oparciu o rozwiązanie Simaana w krótkich czasach (Rów. (32) w [89]).

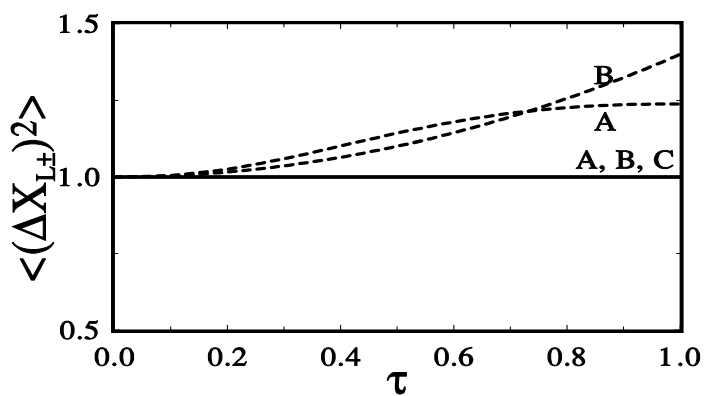
Są to różne efekty i ich definicje nie powinny być utożsamiane (tak jak to pochopnie uczyniono w wielu pracach).

Na rys. 18 przedstawiliśmy ewolucję wariancji ekstremalnych  $\langle(\Delta X_{S\pm}(\tau))^2\rangle$  dla pola stokesowskiego, gdy pola początkowe są koherentne z amplitudami  $\alpha_L = \sqrt{2}$ ,  $\alpha_S = \sqrt{0.2}$  oraz przy dodatkowym założeniu, że termostat jest w niskiej temperaturze (tj.  $\langle\hat{n}_V\rangle = 0$ ). W modelu rozpraszania ramanowskiego w przybliżeniu parametrycznym wariancja  $\langle(\Delta X_S(\theta, \tau))^2\rangle$  (krzywa C na rys. 18) jest niezależna od  $\theta$ , tj.  $\langle(\Delta X_{S+}(\tau))^2\rangle = \langle(\Delta X_{S-}(\tau))^2\rangle$ . Zatem, ścieśnienie nie występuje, gdy początkowe pole stokesowskie jest w stanie koherentnym. Nawet wtedy, gdy pole stokesowskie jest początkowo ścieśnione i  $\gamma_S > \gamma_A$  (niekoniecznie  $\gamma_A = 0$ ), ścieśnienie szybko zanika na skutek wzmocnienia tego pola w oddziaływaniu ramanowskim, co ostatecznie prowadzi do wzrostu szumu [97]. Na rys. 19 wykreśliliśmy wariancje ekstremalne  $\langle(\Delta X_{L\pm}(\tau))^2\rangle$  dla pola laserowego, przyjmując te same warunki początkowe, co w sytuacji przedstawionej na rys. 18. Laserowe pole pompujące w omawianym modelu nie ulega ścieśnieniu. Wyniki otrzymane w tym paragrafie w ramach formalizmu z §3.1.2 (krzywe C) porównaliśmy z rozwiązaniem



Rys. 18:

Ewolucja wariancji ekstremalnych dla pola stokesowskiego:  $\langle(\Delta \hat{X}_{S-})^2\rangle$  (linie ciągłe) oraz  $\langle(\Delta \hat{X}_{S+})^2\rangle$  (linie przerywane) w tych samych przypadkach co na rys. 13.



Rys. 19:

Ewolucja wariancji ekstremalnych dla pola laserowego:  $\langle(\Delta \hat{X}_{L-})^2\rangle$  (linie ciągłe) i  $\langle(\Delta \hat{X}_{L+})^2\rangle$  (linie przerywane) w tych samych przypadkach co na rys. 13.

ściłym (z uwzględnieniem kwantowej statystyki pola pompującego) wyprowadzonym w §3.2.1 oraz rozwiązaniem krótkoczasowym wyznaczonym w uzupełnieniu **E**.

## II. ROZKŁADY FAZOWE

Wszelkie próby znalezienia prawidłowej definicji kwantowo-optycznego operatora fazy w zwykłej przestrzeni Hilberta napotykać na fundamentalne trudności. Być może dlatego zagadnienie fazy jest przedmiotem intensywnych badań począwszy od narodzin mechaniki kwantowej [229], aż po dzień dzisiejszy. W latach dziewięćdziesiątych nastąpiła niemal „eksplozja” publikacji poświęconych fazie.

Obszerną bibliografię można znaleźć w artykułach przeglądowych, m. in. Carruthersa i Nieto [230], Barnetta i Pegga [231], Tanasia [232], Nieto [233], Barnetta i Daltona [234] oraz Lyncha [235], czy też w ubiegłorocznym specjalnym wydaniu *Physica Scripta* [236].

Formalizmy fazowe zasadniczo można podzielić na dwie kategorie: (i) teorie abstrakcyjnego operatora fazy oraz (ii) teorie fazy w przestrzeni fazowej.

Stworzono wiele teorii abstrakcyjnego operatora fazy. Do najbardziej znanych należą: formalizm Diraca [229], formalizm Susskinda-Glogowera [237], formalizm Garrisona-Wonga <sup>34</sup> [238], formalizm Popova-Yarunina <sup>35</sup> [241, 242], formalizm Paula [244], formalizm Lévy-Leblonda [245] i formalizm Pegga-Barnetta [246, 132, 247].

Zasadniczo innym podejściem do zagadnienia fluktuacji fazowych są teorie w przestrzeni fazowej, m.in.: formalizm Schleicha, Walthera i Wheelera [248] oparty na idei pola przekrywania <sup>36</sup>, a także w tym samym duchu formalizm marginalnych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa oraz formalizm Wódkiewicza [249, 250, 251] tzw. przestrzenno-fazowej „propensity” <sup>37</sup>.

Gdyby kryteria poprawności teorii zależały od jej prostoty matematycznej i liczby artykułów, w których zastosowano teorię do opisu własności fazowych różnych pól, to palma pierwszeństwa należałaby do formalizmów Susskinda-Glogowera i Pegga-Barnetta. Oczywiście naczelnym kryterium słuszności teorii fizycznej jest zgod-

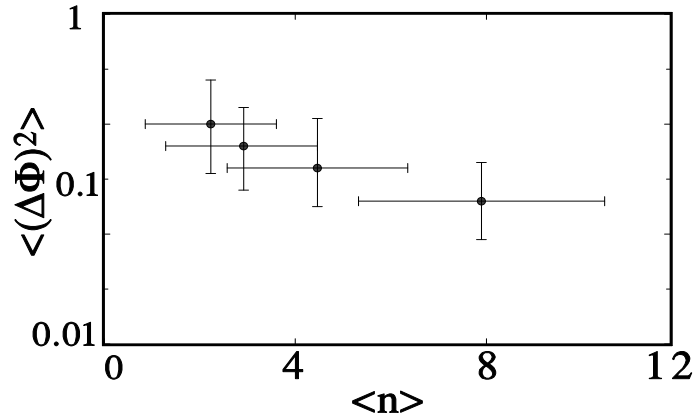
---

<sup>34</sup>zwany czasem formalizmem Garrisona-Wonga-Galindo, vide [239, 240]

<sup>35</sup>jak pokazali Alimov i Damaskinsky [243], formalizm Popova-Yarunina jest równoważny formalizmowi Garrisona-Wonga

<sup>36</sup>ang. area-of-overlap principle

<sup>37</sup>ang. phase-space propensity



Rys. 20:

Dane doświadczalne określające fluktuacje fazy względem średniej liczby fotonów  $\langle \hat{n} \rangle$  otrzymane przez Gerhardta i in. [254, 255] w ujęciu zaproponowanym przez Nieto [257].

ność z doświadczeniem. Zdaniem niektórych naukowców, doświadczenia przeprowadzone przez Noh, Fougereès i Mandela [252]- [253] *zdają się* podważać słuszność (a raczej ważność) formalizmów Susskinda-Glogowera i Pegga-Barnetta, chociaż interpretacja wyników tych doświadczeń jest kwestią otwartą.

Do niedawna znanych było tylko kilka eksperymentów, w których mierzono fluktuacje fazowe, m. in. Gerhardta i in. [254, 255] i Matthysa i Jaynesa [256].

Dane doświadczalne Gerhardta i in. [254, 255] przedstawiliśmy na rys. 20. Zaznaczyliśmy punkty pomiarowe [254] określające fluktuacje fazy względem średniej liczby fotonów  $\langle \hat{n} \rangle$ , z zaznaczeniem niepewności pomiarowych oszacowanych przez Nieto [257]. Wielu autorów porównywało wyniki teoretyczne, otrzymane w ramach różnych formalizmów fazowych, z danymi przedstawionymi na rys. 20. Analizę przedstawili m. in.: Gerhardt i in. [254], Nieto [257], Lévy-Leblond [258], Lynch [259, 260], Galindo [261], Gerry i Urbański [262], Tsui i Reid [263] oraz Bandilla [264].

Serię (być może przełomowych) pomiarów fazy przeprowadzili ostatnio Noh, Fougereès i Mandel [252, 265, 266]. Mandel i współpracownicy wielokrotnie podkreślali,

iż nie roszczą sobie prawa do wyłącznej poprawności ich mierzonego operatora fazy, podczas gdy inne operatory są „błędne”<sup>38</sup>. Jedynie twierdzą, że właściwe zmienne dynamiczne opisujące mierzony sinus i cosinus fazy, a nawet rozkład prawdopodobieństwa fazy i różnicy faz, zależą od metody pomiaru. Zatem różne metody badawcze odpowiadają różnym operatorom fazowym. Barnett i Pegg [268] wyraźnie zaznaczają, że interpretacja eksperymentu Noh i in. [252]– [253], jako pomiaru różnicy faz w zakresie kwantowym jest *niewłaściwa* ([268] str. 4540)<sup>39</sup>. Szereg uwag krytycznych wysunęli także Hradil [270] oraz Hradil i Bajer [271]. Dane eksperymentalne najlepiej tłumaczy teoria Noh, Fougerèsa i Mandela [272, 265], rozwinięta przez Rieglera i Wódkiewicza [273] (cf. [249]). Zgodność z doświadczeniem wyników teorii Freybergera i Schleicha [274] jest również spektakularna.

Należy także wspomnieć o pomiarach Smitheya i in. [275, 276] przy zastosowaniu optycznej tomografii komputerowej<sup>40</sup>.

W niniejszej dysertacji porównamy, a następnie zastosujemy do opisu pól kwantowych, następujące formalizmy fazowe: (i) Pegga-Barnetta (rozdz. 5), (ii) Garrisona-Wonga (rozdz. 6) oraz (iii) formalizm marginalnych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa (rozdz. 7). Niektóre wyniki zamieszczone w rozdziałach 5–7 przedstawiliśmy w artykułach [60, 133, 49]. Dalsze wyniki badań (m. in. analizę własności fazowych pól dwu- i wielomodowych) przedstawimy gdzie indziej.

## 5 Rozkład fazowy Pegga-Barnetta

W tym rozdziale omówimy formalizm fazowy Pegga i Barnetta. W paragrafie 5.1 przypomnimy podstawowe definicje hermitowskiego operatora fazy oraz rozkładu fazowego w ramach formalizmu Pegga-Barnetta. W paragrafie 5.2 podamy kilka nowych relacji

---

<sup>38</sup>w artykule [267] na str. 4536 pisali: *we do not claim that our measured [phase] operators are the "correct" ones whereas other ones are "wrong"*

<sup>39</sup>choć ostatnie eksperymenty Mandela i współpracowników [266] wydają się dotyczyć pomiaru właściwej różnicy faz

<sup>40</sup>nie wszyscy, m.in. Lynch [235], interpretują te eksperymenty jako pomiary fazy

między rozkładami *quasi*-prawdopodobieństwa a rozkładem fazowym. W paragrafie 5.3 zdefiniujemy stany koherentne w przestrzeni skończenie-wymiarowej  $\Psi$ . Nasze rozwinięcia stanów koherentnych w reprezentacji fokowskiej [277] są rozwiązaniem problemu postawionego w pracy Knighta i współpracowników [40]. Wyniki te zastosujemy do wyznaczenia „prawidłowego” rozkładu fazowego stanów koherentnych w przestrzeni  $\Psi$ . Uważamy, że nasze skończenie wymiarowe stany koherentne [277] są jednym z istotniejszych wyników dysertacji.

## 5.1 Formalizm Pegga-Barnetta: hermitowski operator fazy

W przestrzeniach o skończonej liczbie wymiarów można zdefiniować dobrze określony operator fazy. Pewne elementy takiej konstrukcji podali Loudon [278] oraz Popov i Yarunin [241] (cf. [279, 284]). Pegg i Barnett [246, 132, 247] wykorzystując tę własność stworzyli formalizm hermitowskiego operatora fazy.

Rozważmy, zamiast tradycyjnej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ ,  $(\sigma + 1)$ -wymiarową<sup>41</sup> przestrzeń  $\Psi$  rozpiętą na stanach fokowskich  $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |\sigma\rangle$ <sup>42</sup>. W tej przestrzeni można zdefiniować zupełny ortonormalny zbiór stanów fazowych

$$|\vartheta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma + 1}} \sum_{n=0}^{\sigma} \exp(in\vartheta_m) |n\rangle, \quad m = 0, 1, \dots, \sigma, \quad (281)$$

gdzie wartości  $\vartheta_m$  są określone przez

$$\vartheta_m = \vartheta_0 + \frac{2\pi m}{\sigma + 1}. \quad (282)$$

---

<sup>41</sup>ten nietypowy symbol określający wymiar przestrzeni  $\Psi$  wybraliśmy w celu uniknięcia konfliktu oznaczeń z parametrem  $s$  w rozkładach *quasi*-prawdopodobieństwa i w funkcjach charakterystycznych

<sup>42</sup>To określenie przyjęli Pegg i Barnett [246, 132, 247], zachowując termin „przestrzeń Hilberta” wyłącznie dla przypadku granicznego  $\sigma \rightarrow \infty$ . Na mocy często przyjmowanej definicji (np. [280] i rosyjskie słowniki matematyczno-fizyczne) przestrzeń Hilberta musi być unitarna, zupełna i nieskończenie-wymiarowa. Stosowana jest także inna definicja, w myśl której pomija się warunek nieskończonej wymiarowości [281, 282, 283]. Wówczas  $\Psi$  można nazwać skończenie-wymiarową przestrzenią Hilberta [284, 40], gdyż jest unitarna i zupełna.  $\Psi$  nazywa się również przestrzenią Euklidesa [285].

Bazę  $(\sigma + 1)$  ortonormalnych stanów  $|\vartheta_m\rangle$  można określić z pewną swobodą poprzez wybór przedziału („okna”) fazowego  $\langle\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi\rangle$ <sup>43</sup>. Hermitowski optyczny operator fazy Pegga-Barnetta jest zdefiniowany następująco

$$\hat{\Phi}_{\text{PB}} = \sum_{m=0}^{\sigma} \vartheta_m |\vartheta_m\rangle\langle\vartheta_m|. \quad (283)$$

Oczywiście przy takiej konstrukcji, stany fazowe ( 281) są automatycznie stanami własnymi operatora fazowego ( 283) z wartościami własnymi  $\vartheta_m$  ograniczonymi do przedziału  $\langle\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi\rangle$ . Symbol operatora fazowego  $\hat{\Phi}_{\text{PB}}$  oznacza w sposób uproszczony:

$$\hat{\Phi}_{\text{PB}} \equiv \hat{\Phi}_{\vartheta} = \left(\hat{\Phi}_{\vartheta_0}^{(\sigma)}\right)_{\text{PB}}. \quad (284)$$

Nową cechą formalizmu Pegga-Barnetta jest sposób przejścia do granicy  $\sigma \mapsto \infty$ <sup>44</sup>, w myśl którego wszystkie obserwable powinny być wyliczone w przestrzeni skończenie-wymiarowej  $\Psi$  i dopiero wtedy można wyznaczyć granicę  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Jako, że stany fazowe ( 281) są ortonormalne, tj.  $\langle\vartheta_m|\vartheta_{m'}\rangle = \delta_{mm'}$ , to  $k$ -tą potęgę operatora fazowego Pegga-Barnetta ( 283) można zapisać w prosty sposób,

$$\hat{\Phi}_{\text{PB}}^k = \sum_{m=0}^{\sigma} \vartheta_m^k |\vartheta_m\rangle\langle\vartheta_m|, \quad (285)$$

podobnie, w trywialny sposób wyznacza się wartość oczekiwaną  $k$ -tej potęgi  $\hat{\Phi}_{\text{PB}}$ :

$$\langle f|\hat{\Phi}_{\text{PB}}^k|f\rangle = \sum_{m=0}^{\sigma} \vartheta_m^k |\langle\vartheta_m|f\rangle|^2, \quad (286)$$

gdzie wielkość  $|\langle\vartheta_m|f\rangle|^2$  określa prawdopodobieństwo znalezienia  $|f\rangle$  w stanie fazowym  $|\vartheta_m\rangle$ .

Po podstawieniu ( 281) i ( 282) do ( 283) można otrzymać jawną postać operatora fazowego  $\hat{\Phi}_{\text{PB}}$  w reprezentacji fokowskiej [132]:

$$\hat{\Phi}_{\text{PB}} = \vartheta_0 + \frac{\sigma\pi}{\sigma+1} + \frac{2\pi}{\sigma+1} \sum_{n \neq n'} \frac{\exp[i(n-n')\vartheta_0] |n\rangle\langle n'|}{\exp[i(n-n')2\pi/(\sigma+1)] - 1}, \quad (287)$$

---

<sup>43</sup>podkreślamy różnicę między: fazą  $\vartheta_0$  oznaczającą początek przedziału fazowego (282), a fazą  $\theta_0 = \text{Arg } \alpha_0$

<sup>44</sup>ang. Pegg-Barnett limiting procedure



skąd łatwo wyznaczyć komutator <sup>45</sup>:

$$[\hat{\Phi}_{\text{PB}}, \hat{n}] = -\frac{2\pi}{\sigma+1} \sum_{n \neq n'} \frac{(n-n') \exp[i(n-n')\vartheta_0]}{\exp[i(n-n')\frac{2\pi}{\sigma+1}] - 1} |n\rangle \langle n'|. \quad (288)$$

Santhanam [284] oraz Pegg i in. [286] podali definicje operatorów sprzężonych kanonicznie w przestrzeniach skończenie-wymiarowych. Według ich uogólnionych definicji, operatory  $\hat{\Phi}_{\text{PB}}$  i  $\hat{n}$  spełniające związek komutacyjny (288) (*sic!*) są kanonicznie sprzężone, podobnie jak operatory kreacji i anihilacji, operatory położenia i pędu, czy operator kątowy i operator krętu.

Stany fizyczne <sup>46</sup>  $|p\rangle$ , wg definicji Pegga i Barnetta [246, 132], można rozumieć jako stany o skończonej energii, tj.

$$D_p(\hat{n}) = \left\{ |p\rangle \in \mathcal{H} : \bigwedge_{k < \infty} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \langle p | \hat{n}^k | p \rangle = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} n^k b_n^2 < \infty, \right\} \quad (289)$$

gdzie  $b_n = \langle n | p \rangle$ , lub równoważnie, jako stany własne  $[\hat{a}, \hat{a}^+]$  z wartością własną 1, tj.

$$D_p(\hat{n}) = \left\{ |p\rangle \in \mathcal{H} : \lim_{\sigma \rightarrow \infty} [\hat{a}, \hat{a}^+] |p\rangle = |p\rangle \right\} \quad (290)$$

Jeśli ograniczyć rozważania do analizy stanów fizycznych, to większość podstawowych wyrażeń w formalizmie Pegga-Barnetta można znacznie uprościć. Na przykład, jak pokazano w [132], komutator  $[\hat{\Phi}_{\text{PB}}, \hat{n}]$  przyjmuje prostą postać podobną do (374). Dodatkowe warunki ograniczające zbiór dopuszczalnych funkcji pozwalają na zapisanie komutatora (288) w postaci zbliżonej do typowej kanonicznej relacji komutacji (skrót stosowany w literaturze anglosaskiej CCR) <sup>47</sup>. Po drugie, w przybliżeniu stanów fizycznych sumę w równaniu (286) można zastąpić przez całkę, gdy  $\sigma$  w granicy dąży do nieskończoności. Jako, że gęstość stanów równa jest  $(\sigma+1)/2\pi$ , wyrażenie (286) zapiszemy w postaci

$$\langle f | \hat{\Phi}_{\text{PB}}^k | f \rangle = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta \theta^k P_{\text{PB}}(\theta), \quad (291)$$

<sup>45</sup>proszę zwrócić uwagę na błędy w komutatorach (4.1) i (4.2) w [132]

<sup>46</sup>ang. physical states

<sup>47</sup>ang. canonical commutation relation

Ciągły rozkład fazowy  $P_{\text{PB}}(\theta)$  definiuje się jako

$$P_{\text{PB}}(\theta) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma + 1}{2\pi} |\langle \vartheta_m | f \rangle|^2, \quad (292)$$

gdzie dyskretna zmienna  $\vartheta_m$  zostaje zastąpiona przez ciągłą zmienną fazową  $\theta$ .

Dla dowolnego stanu  $|f\rangle$

$$|f\rangle = \sum_n b_n |n\rangle, \quad (293)$$

rozkład fazowy Pegga-Barnetta jest określony wzorem:

$$P_{\text{PB}}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2\text{Re} \sum_{\substack{n,m \\ m>n}} b_m b_n^* \exp[-i(m-n)\theta] \right\}. \quad (294)$$

W przypadku, gdy pole jest w stanie mieszanym opisanym macierzą gęstości  $\hat{\rho}$ , relację ( 294) należy uogólnić do postaci

$$P_{\text{PB}}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2\text{Re} \sum_{m>n} \rho_{mn} \exp[-i(m-n)\theta] \right\}, \quad (295)$$

gdzie  $\rho_{mn} = \langle m | \hat{\rho} | n \rangle$  są elementami macierzowymi w reprezentacji fokowskiej. Wzory ( 294) lub ( 295) mogą być wykorzystane do wyznaczenia rozkładów Pegga-Barnetta dla dowolnego stanu przy znajomości amplitud  $b_n$  lub elementów macierzowych  $\rho_{mn}$ . Wyrażenia ( 294) i ( 295) są dokładne, ale tylko dla nielicznych stanów mogą być zsumowane i zapisane w zwartej analitycznej postaci. Zwykle należy numerycznie zsumować wyrazy, aby wyznaczyć rozkłady fazowe. Taką metodę zastosowano w analizie własności fazowych wielu optycznych pól [25, 47, 64, 133, 197, 198], [287] – [302] (zob. także [232, 236]).

Rozkład fazowy Pegga-Barnetta ( 294) lub ( 295) jest oczywiście  $2\pi$ -okresowy, dodatnio określony oraz unormowany. Dla wszystkich stanów o macierzy gęstości diagonalnej w reprezentacji fokowskiej rozkład jest płaski w przedziale  $\langle \vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi \rangle$ . Wyłącznie elementy niediagonalne macierzy gęstości wnoszą swój przyczynę do rozkładu fazowego Pegga-Barnetta.

W paragrafach 7.2–7.4 pokażemy, że jedno- i dwumodowe rozkłady fazowe w opisie kwantowych stanów pól mogą być wykorzystane jako nowa reprezentacja, alternatywna

do sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa (np. funkcji  $Q$ ,  $P$  i Wignera), uogólnionych reprezentacji  $P$  i innych. Na przykład, gdy pole jest superpozycją  $N$  dobrze rozdzielonych stanów koherentnych, to rozkład fazowy ma  $N$  maksimów opisujących składniki superpozycji [60, 196]. Rozkłady fazowe o dobrze rozdzielonych maksimach pojawiają się także w opisie generacji drugiej harmonicznej i drugiej subharmonicznej [303],  $k$ -tej subharmonicznej (tj. wielofotonowym procesie obniżania częstotliwości)<sup>48</sup> [304] oraz innych procesach (vide [232] i [236]).

## 5.2 Związki między rozkładami *quasi*-prawdopodobieństwa a rozkładem Pegga-Barnetta

Podamy kilka relacji wiążących rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa z rozkładem fazowym Pegga-Barnetta. Podstawą naszych rozważań będą związki między macierzą gęstości  $\hat{\rho}$  a rozmaitymi rozkładami.

Jeśli skorzystać z dobrze znanej relacji

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| P(\alpha) \quad (296)$$

oraz wzoru (295), otrzymujemy w prosty sposób relację między funkcją  $P$  Glaubera-Sudarshana a rozkładem Pegga-Barnetta:

$$P_{PB}(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} \int d^2\alpha \frac{|\alpha|^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} \exp[i(n-m)(\theta - \text{Arg}\alpha) - |\alpha|^2] P(\alpha, t). \quad (297)$$

Wzór (297) jest szczególnym przypadkiem relacji (16) Cahilla i Glaubera [8] dla  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, t)$ . W innym szczególnym przypadku, dla funkcji Wignera ( $s = 0$ ), relacja dla (16) prowadzi do

$$P_{PB}(\theta, t) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n,m} \int d^2\alpha (-1)^m \sqrt{\frac{m!}{n!}} (2|\alpha|)^{n-m} L_m^{n-m}(4|\alpha|^2) \times \exp[i(n-m)(\theta - \text{Arg}\alpha) - 2|\alpha|^2] W(\alpha, t). \quad (298)$$

Wzór ogólny wiążący rozkłady  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, t)$  (dla  $s > -1$ ) i  $P_{PB}(\theta, t)$  na mocy (16) i (295) podali Eiselt i Risken [305].

<sup>48</sup>ang.  $k$ -th subharmonic generation,  $k$ -photon/multiphoton down conversion

Elementy macierzy  $\hat{\rho}$  diagonalne w reprezentacji stanów koherentnych w pełni opisują macierz  $\hat{\rho}$ . Inaczej mówiąc,  $\hat{\rho}$  można wyrazić poprzez funkcje  $Q$ . Wyznaczenie relacji (16) dla  $s \rightarrow -1$  jest często bardzo skomplikowanym problemem (podobne zagadnienie przedstawiliśmy w uzupełnieniu **G**). Eiselt i Risken zaznaczyli, że ich wzór nie jest słuszny dla funkcji  $Q$  ( $s = -1$ ). Aby znaleźć relację między rozkładami  $Q(\alpha, t)$  i  $P_{PB}(\theta, t)$  skorzystamy z innej zależności  $\hat{\rho} = f(Q)$  wyprowadzonej przez Lonke'go [306] (cf. [9]). Po zastosowaniu wzoru (295) otrzymujemy:

$$P_{PB}(\theta, t) = \frac{1}{2\pi^3} \sum_{n,m} \int d^2\alpha \int d^2\beta \frac{(\alpha + \beta)^m (\alpha - \beta)^{*n}}{\sqrt{m!n!}} \times \exp[i(n-m)\theta - |\alpha|^2 + \alpha\beta^* - \alpha^*\beta] Q(\alpha, t), \quad (299)$$

lub w równoważnej formie

$$P_{PB}(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^3} \text{Re} \sum_{m>n} \int d^2\alpha \int d^2\beta \frac{(\alpha + \beta)^m (\alpha - \beta)^{*n}}{\sqrt{m!n!}} \times \exp[i(n-m)\theta - |\alpha|^2 + \alpha\beta^* - \alpha^*\beta] Q(\alpha, t). \quad (300)$$

Jak już wspominaliśmy innym dogodnym rozkładem *quasi*-prawdopodobieństwa jest uogólniona reprezentacja  $P$  Drummonda i Gardinera [9] (uogólniona funkcja  $P$ ). Poszukiwany przez nas związek między  $P(\alpha, \beta^*, t)$  a rozkładem fazowym Pegga-Barnetta ma postać:

$$P_{PB}(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} \int d^2\alpha \int d^2\beta \frac{|\alpha|^m |\alpha|^n}{\sqrt{m!n!}} \times \exp[in(\theta - \text{Arg}\alpha) - im(\theta - \text{Arg}\beta) - \alpha\beta^*] P(\alpha, \beta^*, t). \quad (301)$$

Macierz gęstości  $\hat{\rho}$  ma wiele uogólnionych reprezentacji  $P$ . W przeciwieństwie do  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa (w szczególności do funkcji  $P$ ), które jeśli istnieją to są jedno-jednoznaczными reprezentacjami macierzy  $\hat{\rho}$ . Aby uniknąć tego problemu (pewne  $P(\alpha, \beta^*)$  nie są dodatnio określone) zwykle ogranicza się do wyboru kanonicznej postaci uogólnionej reprezentacji  $P$ ,  $P_{can}(\alpha, \beta^*)$  (vide [21, 22]). Oczywiście, nasza relacja (301) jest słuszna również dla  $P_{can}(\alpha, \beta^*)$ .

### 5.3 Rozkład fazowy Pegga-Barnetta dla stanów koherentnych w skończenie-wymiarowej przestrzeni $\Psi$

W tym paragrafie przedstawimy jeden z bardziej interesujących wyników dysertacji – jawną postać stanów koherentnych w przestrzeni skończenie-wymiarowej  $\Psi$ . Stany, które są analogiem glauberowskich stanów koherentnych w zwykłej przestrzeni Hilberta (§ 2.1).

Stany koherentne  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$ , w  $(\sigma + 1)$ -wymiarowej przestrzeni  $\Psi$ , wykorzystamy do prawidłowej definicji ich rozkładu fazowego w formalizmie Pegga-Barnetta. W uzupełnieniu **F** omówimy pokrótce rozkład liczby fotonów koherentnych w przestrzeni  $\Psi$ . Przedstawimy tylko te dwa przykłady zastosowania stanów  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$ . Można przewidzieć, że stany  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  będą wykorzystane w konstrukcji skończenie-wymiarowych funkcji  $Q$  i funkcji Wignera (por. definicje Woottersa [307], czy też Vaccaro-Pegga [308]).

Ogólnie mówiąc, problem konstrukcji stanów koherentnych w przestrzeni  $\Psi$  nie jest tak prosty jak się może wydawać na pierwszy rzut oka, co ostatnio podkreślali m.in. Knight z współpracownikami [40] oraz Zhang i in. [39]. Trudność polega na znalezieniu jawnej postaci stanów koherentnych  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  w reprezentacji fokowskiej

$$|\alpha\rangle_{(\sigma)} = \sum_{n=0}^{\sigma} C_n^{(\sigma)} |n\rangle. \quad (302)$$

Problem ten niedawno został postawiony przez Knighta i współpracowników [40], którzy zaproponowali procedurę numeryczną wyznaczenia współczynników  $C_n^{(\sigma)}$ . Autorzy [40] jednak nie podali analitycznych wzorów na współczynniki  $C_n^{(\sigma)}$ <sup>49</sup>. W artykule [277] podamy rozwiązanie tego problemu. Pewne wyniki przedstawimy w tym paragrafie oraz uzupełnieniu **F**.

W §2.1 podaliśmy za Glauberem [3] trzy definicje stanów koherentnych. Uogólnienie definicji 1 (20) na przypadek przestrzeni skończenie-wymiarowej nie jest możliwe, gdy komutator operatora anihilacji i kreacji nie jest operatorem jednostkowym (lub jego

---

<sup>49</sup> „We are not able to express the coefficients  $[C_n^{(\sigma)}]$  obtained by this procedure in a closed analytical form.” [40] str. 8084

wielokrotnością) [37, 309, 38, 39]. Operator anihilacji w przestrzeni  $\Psi$  jest dany przez

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \exp(i\hat{\Phi}_\vartheta)\sqrt{\hat{N}} \\ &= |0\rangle\langle 1| + \sqrt{2}|1\rangle\langle 2| + \cdots + \sqrt{\sigma}|\sigma-1\rangle\langle\sigma|,\end{aligned}\quad (303)$$

co oznacza, że komutator nie jest operatorem jednostkowym:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 - (\sigma + 1)|\sigma\rangle\langle\sigma|. \quad (304)$$

Jak łatwo zauważyć, jedynym stanem własnym operatora anihilacji (303) jest stan próżni  $|0\rangle$  z zerową wartością własną. Zatem nie możemy posłużyć się definicją 1. Odrzucamy też definicję 3 (23), gdyż jest niejednoznaczna nawet w zwykłej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Stany  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  definiujemy relacją 2 (21). Najczęściej tę definicję wykorzystuje się konstruując uogólnione stany koherentne, a w szczególności stany w przestrzeniach skończenie-wymiarowych (vide e.g. [39]–[38] i [309]–[314]).

Stany koherentne na mocy definicji (21) można zapisać następująco

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}^n}{n!} |0\rangle, \quad (305)$$

gdzie

$$\hat{T} = \alpha a^+ - \alpha^* a. \quad (306)$$

Operator  $\hat{T}$  w przestrzeni  $\Psi$  przedstawia się jako skończenie-wymiarową macierz

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha^*\sqrt{1} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha\sqrt{1} & 0 & -\alpha^*\sqrt{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha\sqrt{\sigma-1} & 0 & -\alpha^*\sqrt{\sigma} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha\sqrt{\sigma} & 0 \end{bmatrix}. \quad (307)$$

Knight i in. [40] zastosowali numeryczną metodę diagonalizacji trójdiagonalnej macierzy  $\hat{T}$  (307) w celu wyznaczenia współczynników  $C_n^{(\sigma)}$  w (302). Nie znaleźli jednak analitycznych wyrażeń określających  $C_n^{(\sigma)}$ . Poniżej przedstawimy inną metodę konstrukcji stanów  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$ . Podamy analityczne wzory na  $C_n^{(\sigma)}$ . Oprócz tego wyprowadzimy

proste wzory rekurencyjne umożliwiające wyznaczenie  $C_n^{(\sigma)}$  w sposób znacznie prostszy niż procedura diagonalizacji macierzy  $\hat{T}$ .

Wzór (305) w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  zapiszemy następująco

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{1}{n!} d_{n,n-2k} (-\alpha^*)^k \alpha^{n-k} ||n-2k\rangle, \quad (308)$$

gdzie współczynniki  $d_{n,k}$  mają postać

$$d_{n,k} \equiv d_{n,k}^{(\infty)} = \binom{n}{k} (n-k-1)!!. \quad (309)$$

Dla prostoty zapisu stosujemy oznaczenie

$$||n\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle. \quad (310)$$

Stany koherentne  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  w przestrzeni  $\Psi$  zapiszemy w postaci analogicznej do (308):

$$|\alpha\rangle_{(\sigma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{1}{n!} d_{n,n-2k}^{(\sigma)} (-\alpha^*)^k \alpha^{n-k} ||n-2k\rangle. \quad (311)$$

Jeśli skorzystać z warunku

$$\hat{a}^{+k} |n\rangle = 0, \quad \text{gd } n+k > \sigma, \quad (312)$$

to wyrażenie (311) można zapisać w postaci

$$|\alpha\rangle_{(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\sigma} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} d_{nk}^{(\sigma)} (-\alpha^*)^{(n-k)/2} \alpha^{(n+k)/2} ||k\rangle. \quad (313)$$

Współczynniki  $d_{n,k}$  w przestrzeni  $\mathcal{H}$  określamy wzorem rekurencyjnym

$$d_{nk} = d_{n-1,k-1} + (k+1)d_{n-1,k+1} \quad (314)$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$d_{00} = 1, \quad (315a)$$

$$d_{10} = 0, \quad (315b)$$

$$d_{0k} = 0, \quad \text{gd } k > 0. \quad (315c)$$

Wzory (314) and (315a-c) prowadzą do relacji (309). W szczególności mamy:

$$\forall_n d_{nn} = 1, \quad (316a)$$

$$d_{nk} = 0, \quad \text{gdy } n \neq k(\text{mod } 2). \quad (316b)$$

W analogiczny sposób znajdujemy wzory rekurencyjne na współczynniki  $d_{nk}^{(\sigma)}$  w przestrzeni  $\Psi$ . Otrzymaliśmy

$$d_{nk}^{(\sigma)} = d_{n-1,k-1}^{(\sigma)} + (k+1)d_{n-1,k+1}^{(\sigma)} \quad (317)$$

z warunkami brzegowymi

$$d_{00}^{(\sigma)} = 1, \quad (318a)$$

$$d_{10}^{(\sigma)} = 0, \quad (318b)$$

$$\forall_n \forall_{k > \min\{\sigma, n\}} d_{nk}^{(\sigma)} = 0. \quad (318c)$$

Warunek (318c) można zapisać w innej postaci (dla  $k > 0$ ):

$$d_{n,n+k}^{(\sigma)} = d_{n,\sigma+k}^{(\sigma)} = 0, \quad (319)$$

jak również

$$d_{0,k}^{(\sigma)} = d_{n,\sigma+1}^{(\sigma)} = 0. \quad (320)$$

Na mocy powyższych relacji zauważamy następującą prawidłowość, że dla  $n, k = 0, \dots, \sigma$  współczynniki w przestrzeniach  $\Psi$  i  $\mathcal{H}$  są takie same:

$$d_{2n-k,k}^{(\sigma)} = d_{2n-k,k}. \quad (321)$$

Zastosowanie funkcji jednostkowej Heaviside'a (funkcji progowej) (vide uzup. **F**)

$$u_n \equiv u(\sigma - n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sigma \geq n \\ 0 & \text{gdy } \sigma < n \end{cases}, \quad (322)$$

umożliwia zapisanie wzoru rekurencyjnego na współczynniki  $d_{nk}^{(\sigma)}$  w postaci

$$d_{nk}^{(\sigma)} = u_k d_{n-1,k-1}^{(\sigma)} + (k+1)u_{k+1} d_{n-1,k+1}^{(\sigma)} \quad (323)$$



z warunkami brzegowymi (315a-c), tj. identycznymi jak dla współczynników  $d_{n,k}$  w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ .

Otrzymaliśmy następujące rozwiązanie wzorów rekurencyjnych (317)–(323):

$$d_{nk}^{(\sigma)} = \sum_{l=1}^r \gamma_{kl}^{(\sigma)} \left( \beta_l^{(\sigma)} \right)^{(n-k)/2} \prod_{\substack{l'=1 \\ (l \neq l')}}^r \left( \beta_l^{(\sigma)} - \beta_{l'}^{(\sigma)} \right)^{-1}, \quad (324)$$

pod warunkiem, że  $(n - k)$  jest dodatnią liczbą parzystą. W pozostałych przypadkach współczynniki  $d_{nk}^{(\sigma)}$  znikają. Współczynniki  $\beta_l^{(\sigma)}$  są dodatnimi miejscami zerowymi pierwiastków kwadratowych wielomianów Hermite'a:

$$H_{\sigma+1} \left( \sqrt{\frac{\beta_l^{(\sigma)}}{2}} \right) = 0 \quad \text{oraz} \quad \beta_l^{(\sigma)} \neq 0. \quad (325)$$

Uzasadnienie tej relacji, a także wzory określające  $\beta_l^{(\sigma)}$  w przestrzeniach o małej liczbie wymiarów podamy w uzupełnieniu **F**.

Warunek (325) można zapisać w innej postaci dla pierwiastka  $x_k^{(\sigma)} = (\beta_k^{(\sigma)})^{1/2}$ , tj.

$$\text{He}_{\sigma+1}(x_k^{(\sigma)}) = 0, \quad (326)$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji (zmodyfikowanych) wielomianów Hermite'a  $\text{He}(x)$ :

$$\text{He}_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-n/2} H_n(2^{-1/2} x). \quad (327)$$

Uwzględnimy wszystkie (również zerowe i ujemne) pierwiastki  $x_k$ . Rozwiązanie (324) można zapisać w postaci zwartej:

$$d_{nk}^{(\sigma)} = \frac{\sigma!}{k!(\sigma + 1)} \sum_{l=0}^{\sigma} \frac{\text{He}_k(x_l^{(\sigma)})}{[\text{He}_{\sigma}(x_l^{(\sigma)})]^2} (x_l^{(\sigma)})^n, \quad (328)$$

gdzie  $x_l^{(\sigma)}$  są pierwiastkami (zmodyfikowanych) wielomianów Hermite'a (326). Równie dobrze, rozwiązanie (328) można wyrazić poprzez pierwiastki  $\beta_k^{(\sigma)}$  (325).

Figurny, Orłowski i Wódkiewicz znaleźli [346] wartości własne skończenie-wymiarowych operatorów kwadraturowych. Relacje (31) i (22) przedstawione w [346] mają postać zbliżoną do naszego wzoru (328) z pierwiastkami  $x_k^{(\sigma)}$  (326). Uzasadnienie tego podobieństwa podamy w uzupełnieniu **F**.

Współczynniki  $\gamma_{nl}^{(\sigma)}$  pojawiające się w wzorach (324) przyjmują następującą postać dla  $p = 1, \dots, \sigma$ :

$$\gamma_{\sigma-p,l}^{(\sigma)} = \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \left(\beta_l^{(\sigma)}\right)^{r-q-1} \sum_{p_1=1}^{p+1-2q} \sum_{p_2=1}^{p_1} \cdots \sum_{p_{q-1}=1}^{p_{q-2}} \prod_{i=0}^{q-1} (1 + \sigma + p_{q-i} - 2i) \quad (329a)$$

i dla  $p = 0$ :

$$\gamma_{\sigma l}^{(\sigma)} = \gamma_{\sigma-1,l}^{(\sigma)} = \left(\beta_l^{(\sigma)}\right)^{r-1}. \quad (329b)$$

W szczególności zauważamy, że współczynniki  $\gamma_{\sigma-p,l}^{(\sigma)}$  przyjmują najprostsza formę dla  $p = \sigma$  i  $(\sigma - 1)$ , mianowicie

$$\gamma_{0l}^{(\sigma)} = \gamma_{1,l}^{(\sigma)} \left(\beta_l^{(\sigma)}\right)^{-1}. \quad (330)$$

Po podstawieniu rozwiązania (324) do (313) znajdujemy ogólny wzór określający stany koherentne w  $(\sigma + 1)$ -wymiarowej przestrzeni  $\Psi$ :

$$|\alpha\rangle_{(\sigma)} = \sum_{n=0}^{\sigma} C_n^{(\sigma)} |n\rangle, \quad (331)$$

$$\begin{aligned} C_n^{(\sigma)} &= e^{in\theta_0} \sqrt{n!} \sum_{l=1}^r \gamma_{nl}^{(\sigma)} \left(\beta_l^{(\sigma)}\right)^{-n/2} U_n(2\sqrt{\beta_l^{(\sigma)}}|\alpha|, 0) \\ &\times \prod_{\substack{k=1 \\ l \neq k}}^r \left(\beta_l^{(\sigma)} - \beta_k^{(\sigma)}\right)^{-1} + \delta_{0m}, \end{aligned} \quad (332)$$

gdzie  $r = \lceil \frac{\sigma+1}{2} \rceil$  oraz  $U_n(2x, 0)$  oznacza funkcję Lommela dwóch zmiennych zdefiniowaną następująco [315]:

$$U_{2m+1}(2x, 0) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^m \left( \sin x - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} \right), \quad (333a)$$

$$U_{2m}(2x, 0) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^m \left( \cos x - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} \right). \quad (333b)$$

Wzór (333b) nie określa funkcji Lommela dla  $n = 0$ . Z uwagi na tę swobodę wyboru definicji  $U_0(2x, 0)$ , przyjmujemy:

$$U_0(2x, 0) = \cos(x) - 1 = 2 \sin^2(x/2). \quad (334)$$

Oczywiście, definicję funkcji Lommela (333a-b) i (334) można zapisać jako jedno wyrażenie obejmujące funkcje o  $n$  parzystym, nieparzystym i równym zero.

Jeśli  $\sigma$  jest liczbą pierwszą, to współczynniki (332) można zapisać w prostszej postaci

$$C_n^{(\sigma)} = e^{in\theta_0} \sqrt{n!} \sum_{l=1}^r \gamma_{nl}^{(\sigma)} \left(\beta_l^{(\sigma)}\right)^{-n/2} \times \cos \left( \sqrt{\beta_l^{(\sigma)}} |\alpha| - n \frac{\pi}{2} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ l \neq k}}^r \left(\beta_l^{(\sigma)} - \beta_k^{(\sigma)}\right)^{-1}. \quad (335)$$

Wzory (332) i (335) można zapisać w zwartej postaci

$$C_n^{(\sigma)} = \frac{\sigma!}{\sigma+1} (n!)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\sigma} \exp \left\{ i \left[ n(\theta_0 - \pi/2) + x_k^{(\sigma)} |\alpha| \right] \right\} \times \text{He}_n(x_k^{(\sigma)}) [\text{He}_\sigma(x_k^{(\sigma)})]^{-2}, \quad (336)$$

gdzie  $x_k^{(\sigma)}$  są pierwiastkami wielomianów Hermite'a (326).

Na mocy samej konstrukcji stanów  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  są spełnione następujące własności: (i) w granicy, gdy wartość  $\sigma$  dąży do nieskończoności, skończone-wymiarowe stany  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  przechodzą w zwykłe glauberowskie stany koherentne  $|\alpha\rangle$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |\alpha\rangle_{(\sigma)} = |\alpha\rangle \quad (337)$$

oraz (ii) dla dowolnej wartości  $\sigma$  stany  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  są unormowane

$${}_{(\sigma)}\langle \alpha | \alpha \rangle_{(\sigma)} = 1. \quad (338)$$

Jako, że komutator (304) nie jest operatorem jednostkowym, to zachodzi nierówność

$${}_{(\sigma)}\langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle_{(\sigma)} \neq |\alpha|^2. \quad (339)$$

Szczególne przypadki stanów koherentnych  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  w przestrzeniach o  $\sigma = 2, 3, 4, 5$  wymiarach podamy w uzupełnieniu **F**. Tamże przedstawimy więcej szczegółów konstrukcji stanów  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$ . Zajmiemy się obecnie określeniem własności fazowych stanów koherentnych w przestrzeniach  $\Psi$ .

Barnett i Pegg [247] badali własności fazowe stanów koherentnych. Ich analiza nie jest jednak w pełni logiczna. Korzystali bowiem z następującego rozkładu fazowego

$$P(\vartheta_m) \equiv |_{(\sigma)}\langle \vartheta_m | \alpha \rangle_{(\infty)}|^2, \quad (340)$$

co oznacza, że analizowali glauberowskie (tj. nieskończenie wymiarowe) stany koherentne  $|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle_{(\infty)}$  w skończenie-wymiarowej przestrzeni  $\Psi$ . Ta uwaga dotyczy nie tylko własności fazowych stanów koherentnych, ale większości stanów analizowanych przez Peggą i Barnetta oraz ich następców (obszerną bibliografię można znaleźć w [232, 234]). Pewnym uzasadnieniem stosowania rozkładu (340) jest możliwość wyboru dostatecznie dużej wartości  $\sigma$ , aby został spełniony warunek Cauchy’go:

$$\forall \epsilon \quad \exists \sigma \quad 1 - \sum_{n=0}^{\sigma} |C_n^{(\sigma)}|^2 \leq \epsilon. \quad (341)$$

Jednak z formalno-logicznego punktu widzenia istotne jest określenie stanów w przestrzeni  $\Psi$  dokładnie spełniających warunek unormowania (338)

$$\forall \sigma \quad \sum_{n=0}^{\sigma} |C_n^{(\sigma)}|^2 = 1. \quad (342)$$

Na rys. 21 widać, że w miarę wzrostu wartości  $\sigma$  różnice między stanem koherentnym  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  w przestrzeni  $\Psi$  i glauberowskim stanem koherentnym  $|\alpha\rangle$  w  $\mathcal{H}$  maleją. Jednak różnice mogą być istotne gdy  $|\alpha| \geq \sigma$ .

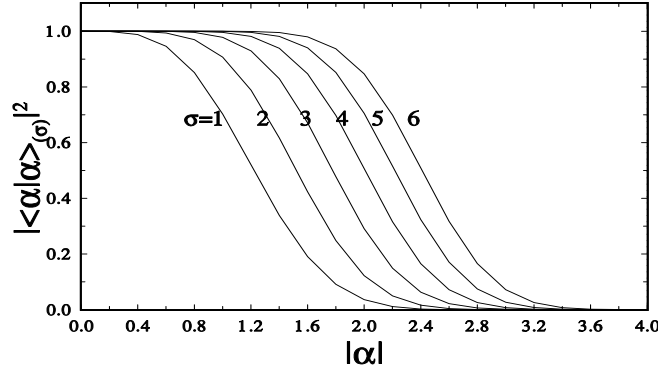
Znając stany koherentne  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  (331) w reprezentacji fokowskiej z jawnie wyznaczonymi współczynnikami superpozycji (336), możemy wyznaczyć analitycznie i numerycznie ich własności fazowe w przestrzeniach  $(\sigma + 1)$ -wymiarowych  $\Psi$  korzystając z dyskretnego rozkładu fazowego Peggą-Barnetta

$$P(\vartheta_m) \equiv |_{(\sigma)}\langle \vartheta_m | \psi(t) \rangle_{(\sigma)}|^2. \quad (343)$$

Stan koherentny  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  (w szczególności  $|\alpha_0\rangle$ ) jest przykładem tzw. stanu *pseudo*-fazowego<sup>50</sup>. Wybieramy początkową wartość  $\vartheta_0$  w sposób dogodny dla

---

<sup>50</sup>tłumaczenie ad sensum ang. partial phase state, termin został wprowadzony przez Peggą i Barnetta [132]



Rys. 21:

Zależność stanów koherentnych  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  od wymiaru przestrzeni  $\sigma$  ( $\sigma=1-5$ ), przedstawiona jako moduł (w kwadracie) iloczynu skalarnego stanów  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  i  $|\alpha\rangle$ .

stanów *pseudo-fazowych* [132]

$$\vartheta_0 = \theta_0 - \frac{\sigma}{\sigma+1}\pi. \quad (344)$$

Jeśli wprowadzić nową numerację  $\mu = m - \sigma/2$ , to otrzymamy

$$\vartheta_\mu = \frac{2\pi}{\sigma+1}\mu + \theta_0, \quad \mu = -\frac{\sigma}{2}, \dots, \frac{\sigma}{2}. \quad (345)$$

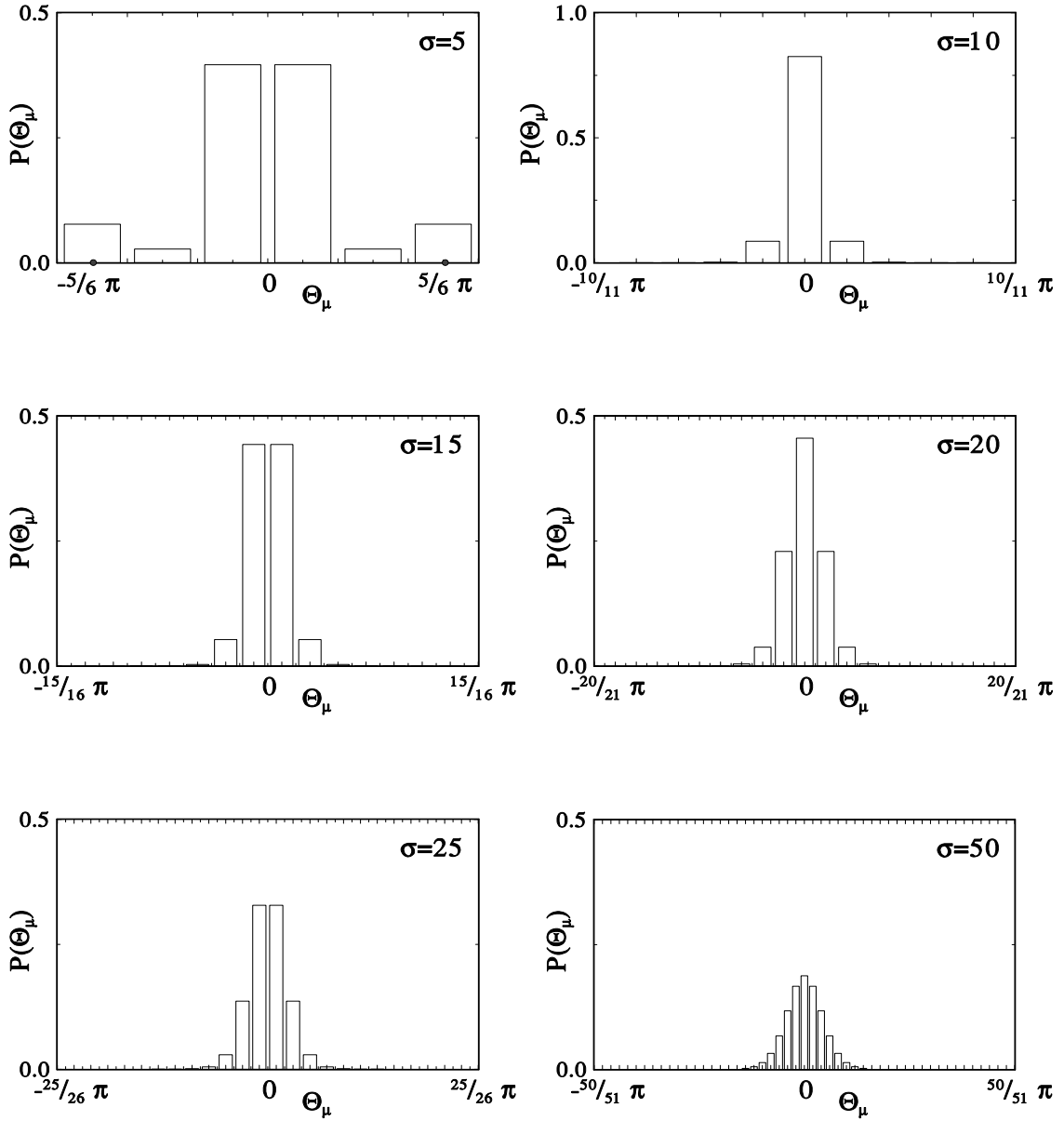
Wówczas rozkład fazowy Pegga-Barnetta (343) przyjmuje postać symetryczną względem  $\mu$ :

$$\begin{aligned} P(\vartheta_\mu) &= |{}_{(\sigma)}\langle\vartheta_\mu|\alpha\rangle_{(\sigma)}|^2 \\ &= \frac{1}{\sigma+1} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\sigma} \sum_{k=0}^{n-1} |C_n^{(\sigma)}| |C_k^{(\sigma)}| \cos[(n-k)\vartheta_\mu] \right\}. \end{aligned} \quad (346)$$

W granicy, gdy  $\sigma$  dąży do nieskończoności, należy wprowadzić ciągłą zmienną fazową zamieniając  $\vartheta_\mu$  przez  $\theta$  oraz  $2\pi/(\sigma+1)$  przez  $d\theta$ . Po przejściu do granicy otrzymujemy

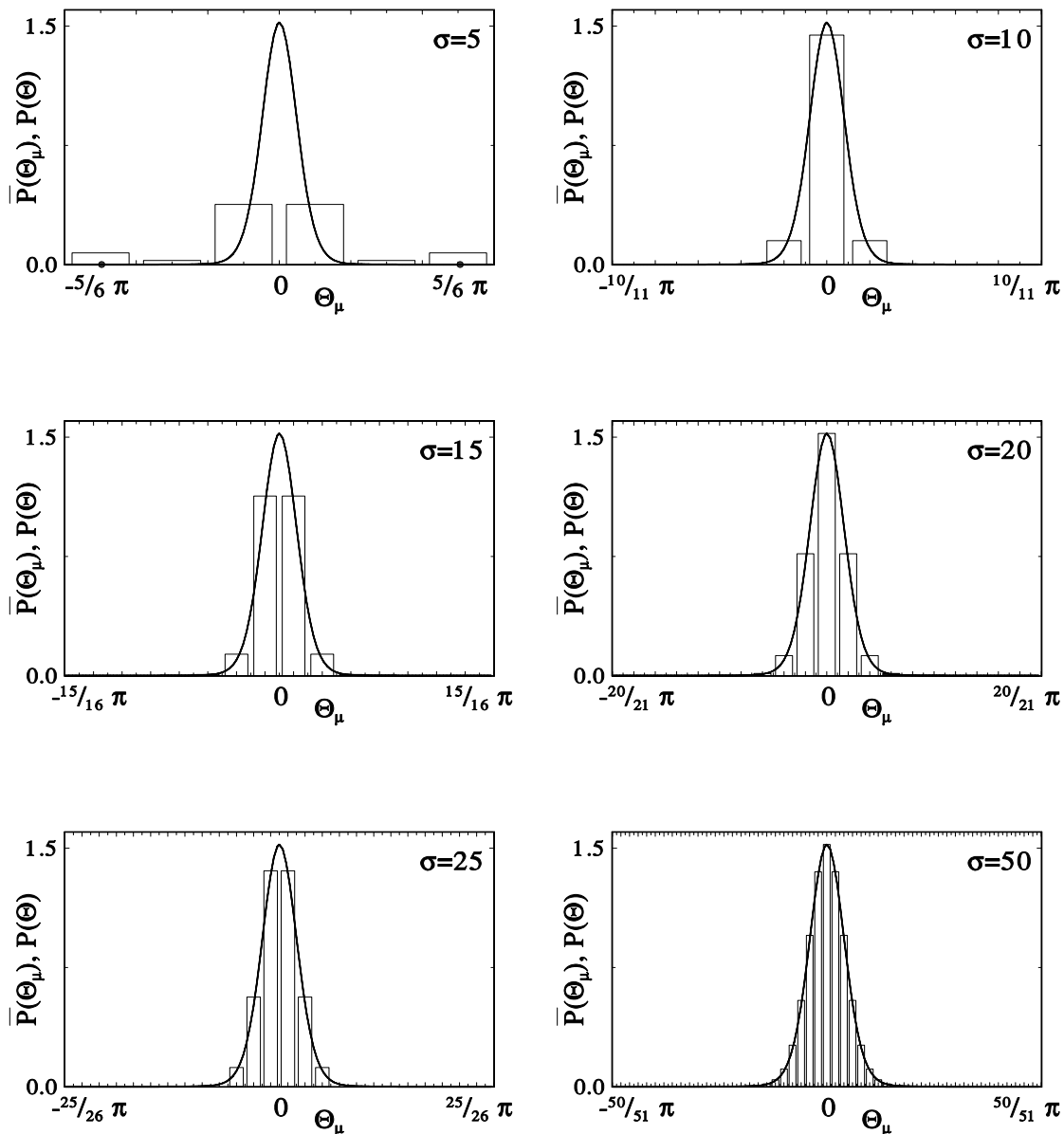
$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{P}(\vartheta_\mu) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma+1}{2\pi} P(\vartheta_\mu) = P(\theta) \quad (347)$$

ciągły rozkład fazowy Pegga-Barnetta  $P(\theta)$  dla glauberowskich stanów koherentnych.



Rys. 22:

Dyskretny rozkład fazowy Pegg-Barnetta  $P(\vartheta_\mu)$  w  $(\sigma + 1)$ -wymiarowych przestrzeniach  $\Psi$  dla stanu koherentnego o  $\alpha = 2$ .



Rys. 23:

Rozkłady fazowe Pegga-Barnetta dla stanu koherentnego o  $\alpha = 2$ : dyskretna funkcja  $\bar{P}(\vartheta_\mu)$  w  $(\sigma + 1)$ -wymiarowych przestrzeniach  $\Psi$  w porównaniu do ciągłej funkcji  $P(\theta)$  w zwykłej przestrzeni Hilberta.

Na rys. 22 przedstawiliśmy dyskretne rozkłady fazowe Pegga-Barnetta  $P(\vartheta_\mu)$  dla stanu koherentnego  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  z amplitudą  $|\alpha| = \alpha = 2$  w przestrzeniach  $\Psi$  o wartościach  $\sigma = 5, \dots, 50$ . Z uwagi na warunek unormowania

$$\sum_{\mu=-\sigma/2}^{\sigma/2} P(\vartheta_\mu) = 1, \quad (348)$$

maksymalne wartości rozkładów  $P(\vartheta_\mu)$  (dla różnych  $\sigma$ ) znacznie się między sobą różnią. W celu uniknięcia powyższej trudności, a tym samym w celu bezpośredniego porównania dyskretnych rozkładów fazowych z rozkładem ciągłym  $P(\theta_\mu)$ , wykorzystaliśmy relację (347).

Na rys. 23 przedstawiliśmy dyskretną funkcję  $\bar{P}(\vartheta_\mu)$ , tj. przeskalowany rozkład  $P(\vartheta_\mu)$ , w porównaniu do ciągłego rozkładu  $P(\theta)$  dla tych samych przypadków co na rys. 22. Wprowadzenie miary (czynnika skalującego)  $\frac{\sigma+1}{2\pi}$  do  $P(\vartheta_\mu)$  jest dogodnym zabiegiem matematycznym. Na wykresach dobrze widać, że w miarę wzrostu wartości  $\sigma$  różnice między rozkładami w przestrzeniach  $\Psi$  i  $\mathcal{H}$  maleją, jeśli tylko  $\sigma \gg |\alpha|^2$ .

## 6 Rozkład fazowy Garrisona-Wonga

W tym rozdziale omówimy formalizm fazowy Garrisona-Wonga [238], zwany również formalizmem Garrisona-Wonga-Galindo (vide [239, 240, 235]). W paragrafie 6.1 podamy podstawowe definicje hermitowskiego operatora fazy oraz rozkładu fazowego w ramach formalizmu Garrisona-Wonga. Znajdziemy rozwiązania równań iteracyjnych, co znacznie uprości metodę wyznaczania rozkładu fazowego Garrisona-Wonga. Pokażemy równoważność formalizmów Popova-Yarunina [241, 242] i Garrisona-Wonga. W paragrafie 6.2 porównamy explicite formalizmy Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga w ogólnym przypadku, jak również na przykładzie własności fazowych konkretnych kwantowych pól optycznych. Wyniki paragrafu §6.2 opublikowaliśmy w [133]. Uważamy, że analiza porównawcza formalizmów fazowych Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga jest istotnym wynikiem dysertacji.



## 6.1 Formalizm Garrisona-Wonga: hermitowski operator fazy

Garrison i Wong [238] zdefiniowali hermitowski <sup>51</sup> operator fazowy  $\hat{\Phi}_{\text{GW}}$  korzystając z relacji:

$$\langle g | \hat{\Phi}_{\text{GW}} | f \rangle = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta g^*(e^{-i\theta}) \theta f(e^{-i\theta}) \quad (349)$$

śluszej dla dowolnych funkcji  $g$  i  $f$  należących do przestrzeni Hilberta  $H^2$  określonej na jednostkowym dysku w płaszczyźnie zespolonej. Nieznacznie zmodyfikowaliśmy oryginalną definicję Garrisona i Wonga zezwalając na dowolność wyboru przedziału fazowego  $\langle \vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi \rangle$  oraz zmieniając znak wyrażenia (349) wzorując się definicją operatora fazowego Pegga-Barnetta. Iloczyn wewnętrzny w  $H^2$  jest zdefiniowany następująco

$$\langle g | f \rangle = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta g^*(e^{-i\theta}) f(e^{-i\theta}). \quad (350)$$

Wartość graniczną  $f$  określa zbieżny szereg Fouriera

$$f(e^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-in\theta}, \quad (351)$$

nie zawierający współczynników  $f_n$  z ujemnym  $n$ .

Popov i Yarunin [241] (cf. [242, 318]) zdefiniowali hermitowski operator fazy  $\hat{\Phi}_{\text{PY}}$ , jako funkcję „wykładniczych” operatorów fazowych  $\hat{E}_{\pm}$  Susskinda-Glogowera [237]:

$$\hat{\Phi}_{\text{PY}} = \vartheta_0 + \pi + i \left[ \ln(1 - e^{i\vartheta_0} \hat{E}_+) - \ln(1 - e^{-i\vartheta_0} \hat{E}_-) \right]. \quad (352)$$

Operatory  $\hat{E}_-$  i  $\hat{E}_+ = (\hat{E}_-)^+$  są zdefiniowane przez operatory anihilacji  $\hat{a}$  i kreacji  $\hat{a}^+$ :

$$\hat{E}_- = \hat{a} (\hat{a}^+ \hat{a})^{-1/2}, \quad \hat{E}_+ = (\hat{a}^+ \hat{a})^{-1/2} \hat{a}^+, \quad (353a)$$

---

<sup>51</sup>Interpretacja fizyczna wymaga, aby operatory przyporządkowane wielkościom fizycznym były samosprężone. Stąd też w mechanice kwantowej zwykło się utożsamiać pojęcia hermitowskości i samosprężoności. Będziemy stosować tę niewłaściwą (w sensie matematycznym) konwencję [316, 317].

$$[\hat{E}_-, \hat{E}_+] = |0\rangle\langle 0|, \quad (353b)$$

gdzie  $|0\rangle$  jest stanem próżni. Definicja ( 353a) jest niejednoznaczna, gdyż zbiór wartości własnych operatora  $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$  zawiera również zero. Korzystając ze znanej własności operatorowej [19] wzór ( 353a) można zapisać w innej postaci

$$\hat{E}_- = (\hat{a}^+\hat{a} + 1)^{-1/2} \hat{a}, \quad \hat{E}_+ = \hat{a}^+ (\hat{a}^+\hat{a} + 1)^{-1/2}, \quad (353c)$$

która jest jednoznaczna dla  $n = 0$ .

Rozważmy „stany fazowe”

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in\theta) |n\rangle, \quad (354)$$

które są stanami własnymi operatora  $\hat{E}_-$ ,

$$\hat{E}_- |\theta\rangle = \exp(i\theta) |\theta\rangle, \quad (355a)$$

Oczywiście, zachodzi też podobny związek dla  $\hat{E}_+$ :

$$\langle\theta| \hat{E}_+ = \exp(-i\theta) \langle\theta|. \quad (355b)$$

Stany ( 354) nie są ortogonalne, ale spełniają regułę zupełności

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta |\theta\rangle\langle\theta| = \hat{1}. \quad (356)$$

Podstawiając ( 355a-b) i ( 356) do definicji ( 352) otrzymujemy inny wzór określający operator fazowy  $\hat{\Phi}_{\text{PY}}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{\text{PY}} &= \vartheta_0 + \pi + i \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta |\theta\rangle\langle\theta| \{ \ln[1 - e^{-i(\theta-\vartheta_0)}] - \ln[1 - e^{i(\theta-\vartheta_0)}] \} \\ &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta |\theta\rangle\theta\langle\theta|. \end{aligned} \quad (357)$$

Pragniemy zwrócić uwagę na fakt, że stany ( 354) nie są stanami własnymi  $\hat{\Phi}_{\text{PY}}$ .

Z ( 357) otrzymujemy relację

$$\langle g|\hat{\Phi}_{PY}|f\rangle = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta \langle g|\theta\rangle\theta\langle\theta|f\rangle, \quad (358)$$

która odpowiada definicji ( 349). Aby tę równoważność pokazać explicite, rozważmy stany pola  $|f\rangle$  w reprezentacji fokowskiej

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle. \quad (359)$$

Funkcje

$$\langle\theta|f\rangle = f(e^{-i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-in\theta}, \quad (360)$$

mają wówczas taką samą postać jak ( 351), zatem operatory fazowe ( 349) i ( 352) są równoważne

$$\hat{\Phi}_{GW} \equiv \hat{\Phi}_{PY}. \quad (361)$$

. Do podobnego wniosku doszli Alimov i Damaskinsky [243]. Trzeba jednak pamiętać o dziedzinie określoności operatora Garrisona-Wonga. Powrócimy jeszcze do tego zagadnienia. Dla prostoty, w dalszym ciągu będziemy stosować terminologię: operator fazowy Garrisona-Wonga, rozkład fazowy Garrisona-Wonga, itd.

Jako, że stany ( 354) nie są ortogonalne to :

$$\hat{\Phi}_{GW}^k \neq \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta \theta^k |\theta\rangle\langle\theta| \quad (k > 1), \quad (362)$$

$$\langle f|\hat{\Phi}_{GW}^k|f\rangle \neq \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta \theta^k |\langle\theta|f\rangle|^2 \quad (k > 1). \quad (363)$$

Oznacza to, że funkcja fazowa  $|\langle\theta|f\rangle|^2$  nie może być interpretowana jako rozkład fazowy. Aby skonstruować rozkład fazowy Garrisona-Wonga należy wyznaczyć następującą wielkość

$$P_{GW}(\theta) = |{}_{GW}\langle\theta|f\rangle|^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n {}_{GW}\langle\theta|f\rangle \right|^2, \quad (364)$$

gdzie  $|\theta\rangle_{\text{GW}}$  jest wektorem własnym operatora  $\hat{\Phi}_{\text{GW}}$ . Dla stanów mieszanych, opisanych macierzą gęstości  $\hat{\rho}$ , wzór ( 364) uogólnimy do postaci

$$P_{\text{GW}}(\theta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} {}_{\text{GW}}\langle\theta|m\rangle {}_{\text{GW}}\langle\theta|n\rangle^* \rho_{mn} \quad (365)$$

Funkcja  ${}_{\text{GW}}\langle\theta|n\rangle$  ma skomplikowaną strukturę [238, 241, 242], ale może być obliczona ze wzorów rekurencyjnych wyprowadzonych przez Garrisona i Wonga [238]:

$${}_{\text{GW}}\langle\theta|n\rangle = \left[ \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\theta - \vartheta_0}{2}\right) \right]^{1/2} \phi_n(\theta), \quad (366)$$

gdzie, dla  $n \geq 1$ :

$$\phi_n(\theta) = - \sum_{m=0}^{n-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \gamma_{n-m}(\theta) \phi_m(\theta), \quad (367)$$

$$\gamma_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} d\theta \ln|\theta' - \theta| e^{in\theta'} - \frac{1}{2n} [e^{in\vartheta_0} + e^{in\theta}], \quad (368)$$

oraz dla  $n = 0$ :

$$\phi_0(\theta) = e^{-\gamma_0(\theta)}, \quad (369)$$

$$\gamma_0(\theta) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} [(2\pi + \vartheta_0 - \theta) \ln(2\pi + \vartheta_0 - \theta) + (\theta - \vartheta_0) \ln(\theta - \vartheta_0)]. \quad (370)$$

Znaleźliśmy rozwiązanie wzoru rekurencyjnego ( 367) w postaci

$$\phi_n(\theta) = e^{-\gamma_0(\theta)} \sum_{\{n_i, m_i\}} \prod_{i=1}^k \frac{(-1)^{m_i}}{m_i!} \gamma_{n_i}^{m_i}(\theta), \quad (371)$$

gdzie sumowanie przebiega po wskaźnikach  $\{n_i, m_i\}$  spełniających warunek  $\sum_{i=1}^k n_i m_i = n$ . Okazuje się, że całkę we wzorze ( 368) też można wyliczyć. Skorzystamy z funkcji wykładniczej całkowej  $\text{Ei}(x)$  [319, 134]. Po przekształceniach otrzymaliśmy wyrażenie

$$\begin{aligned} \gamma_n(\theta) = \frac{1}{2\pi i n} \left\{ e^{in\vartheta_0} \left[ \ln\left(\frac{2\pi}{\theta - \vartheta_0} - 1\right) - i\pi \right] \right. \\ \left. + e^{in\theta} (\text{Ei}[in(2\pi + \vartheta_0 - \theta)] - \text{Ei}[-in(\theta - \vartheta_0)]) \right\}. \quad (372) \end{aligned}$$

Funkcję  $Ei(x)$  można wyrazić w postaci szybko zbieżnych szeregów, co znacznie ułatwia numeryczne wyznaczenie  $P_{\text{GW}}(\theta)$ . Wzór ( 372) można też wyrazić w prostej formie poprzez cosinusy i sinusy całkowe lub zupełną funkcję wykładniczą całkową  $\text{Ein}(x)$ . Wyrażenia ( 366), ( 370)–( 372) wykorzystamy w obliczeniach rozkładu fazowego  $P_{\text{GW}}(\theta)$  dla kilku konkretnych stanów pola. Nawet powierzchowna analiza tych wzorów wskazuje na istotne różnice między rozkładami Garrisona-Wonga i Pegga-Barnetta.

Po podstawieniu ( 354) do ( 357) i scałkowaniu po  $\theta$ , operator fazowy Garrisona-Wonga można wyrazić w reprezentacji fokowskiej:

$$\hat{\Phi}_{\text{GW}} = \vartheta_0 + \pi + \sum_{n \neq n'} \frac{\exp[i(n - n')\vartheta_0] |n\rangle\langle n'|}{i(n - n')}, \quad (373)$$

co bezpośrednio prowadzi do komutatora

$$[\hat{\Phi}_{\text{GW}}, \hat{a}^+ \hat{a}] = -i(1 - |\vartheta_0\rangle\langle \vartheta_0|). \quad (374)$$

Zatem kanoniczne reguły komutacji (CCR) w sensie Weyla nie są spełnione. Operatory: fazowy  $\hat{\Phi}_{\text{GW}}$  i liczby cząstek  $\hat{n}$  są zmiennymi kanonicznymi jedynie na zbiorze gęstym

$$\Omega = \left\{ |f\rangle \in D(\hat{n}) : \langle \vartheta_0 | f \rangle \equiv \sum_n f_n e^{-in\vartheta_0} = 0 \right\}, \quad (375)$$

gdzie  $D(\hat{n})$  jest dziedziną operatora  $\hat{n}$ . Inaczej mówiąc, operatory  $\hat{\Phi}_{\text{GW}}$  i  $\hat{n}$  spełniają CCR w sensie Heisenberga

$$\langle g | [\hat{\Phi}_{\text{GW}}, \hat{n}] | f \rangle = -i \langle g | f \rangle, \quad (376)$$

lub

$$[\hat{\Phi}_{\text{GW}}, \hat{n}] | f \rangle = -i | f \rangle, \quad (377)$$

gdzie  $|g\rangle \in D(\hat{n})$  i  $|f\rangle \in \Omega$ . Równoważność ( 376) i ( 377) wynika z faktu, że  $\Omega$  jest zbiorem gęstym.

## 6.2 Porównanie rozkładów Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga

Formalizm Pegga-Barnetta (PB) w paragrafie 5.1 oraz formalizm Garrisona-Wonga (GW) w paragrafie 6.1 przedstawiliśmy w taki sposób, aby podkreślić różnice i podobieństwa między nimi. Przeciwstawiliśmy wyrażenia na: operatory fazowe  $\hat{\Phi}_{\text{PB}}$  ( 283), ( 287) i  $\hat{\Phi}_{\text{GW}}$  ( 357), ( 373);  $k$ -te potęgi operatorów  $\hat{\Phi}_{\text{PB}}^k$  ( 285) i  $\hat{\Phi}_{\text{GW}}^k$  ( 362); wartości oczekiwane  $\langle \hat{\Phi}_{\text{PB}}^k \rangle$  ( 286), ( 291) i  $\langle \hat{\Phi}_{\text{GW}}^k \rangle$  ( 358), ( 363); komutatory  $[\hat{\Phi}_{\text{PB}}, \hat{n}]$  ( 288) i  $[\hat{\Phi}_{\text{GW}}, \hat{n}]$  ( 374)–( 377); oraz rozkłady fazowe  $P_{\text{PB}}(\theta)$  ( 292) i  $P_{\text{GW}}(\theta)$  ( 364).

Łatwo zauważyć, że w granicy  $\sigma \rightarrow \infty$  operator fazowy  $\hat{\Phi}_{\text{PB}}$  ( 287) przechodzi w operator  $\hat{\Phi}_{\text{GW}}$  ( 373):

$$\hat{\Phi}_{\text{GW}} \cong \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \hat{\Phi}_{\text{PB}}. \quad (378)$$

Jednak, pomimo tej relacji, dwa formalizmy Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga prowadzą do innych wyników fizycznych. Przyczyną tych różnic jest nieprzemienny charakter operacji przejścia do granicy  $\sigma \rightarrow \infty$  i wyznaczania wartości oczekiwanych

$$\underbrace{\langle f(\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \hat{\Phi}_{\text{PB}}) \rangle}_{\text{Garrison-Wong}} \neq \underbrace{\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \langle f(\hat{\Phi}_{\text{PB}}) \rangle}_{\text{Pegg-Barnett}}, \quad (379)$$

gdzie  $f(\hat{\Phi}_{\text{PB}})$  jest dowolną funkcją operatora fazowego. W zależności od tego w jakiej kolejności dokonamy tych operacji, otrzymujemy inne wyniki.

Przedstawimy explicite różnice między formalizmami PB i GW na konkretnych przykładach. Obliczymy wariancje i rozkłady fazowe dla stanów fokowskich, koherentnych oraz próżni ścięśnionej. Aby wyznaczyć wariancję  $\langle (\Delta \hat{\Phi}_{\text{GW}})^2 \rangle$  obliczymy wpraw kwadrat operatora  $\hat{\Phi}_{\text{GW}}$  ( 373):

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{\text{GW}}^2 &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle \langle n| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &+ \sum_{n>n'} \frac{(-1)^{n-n'}}{n-n'} \left( \frac{2}{n-n'} - \sum_{k=n'+1}^n \frac{1}{k} \right) (|n\rangle \langle n'| + |n'\rangle \langle n|), \end{aligned} \quad (380)$$

słuszny przy szczególnym wyborze przedziału fazowego  $\langle \vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi \rangle = \langle -\pi, \pi \rangle$ . Rozważmy stan pola  $|f\rangle$  w reprezentacji fokowskiej

$$|f\rangle = \sum_n b_n e^{in\varphi} |n\rangle, \quad (381)$$

gdzie współczynniki  $b_n$  są rzeczywiste. Wariancja fazy dla tego stanu jest dana przez

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{\Phi}_{\text{GW}})^2 \rangle &= \langle \hat{\Phi}_{\text{GW}}^2 \rangle - \langle \hat{\Phi}_{\text{GW}} \rangle^2 \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &\quad + 2 \sum_{n>n'} \frac{(-1)^{n-n'}}{n-n'} \left( \frac{2}{n-n'} - \sum_{k=n'+1}^n \frac{1}{k} \right) b_n b_{n'}. \end{aligned} \quad (382)$$

Dla prostoty przyjęliśmy  $\varphi = 0$ . Zgodnie z procedurą Pegga-Barnetta, wg której wartości oczekiwane należy obliczyć przed wyznaczeniem granicy  $\sigma \rightarrow \infty$ , wariancja fazy  $\langle (\Delta \hat{\Phi}_{\text{PB}})^2 \rangle$  jest równa [247]:

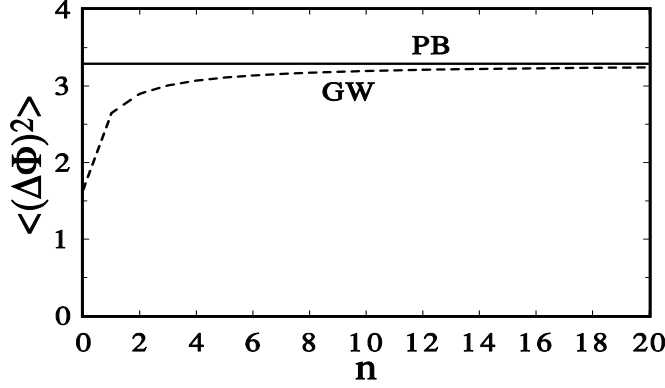
$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{\Phi}_{\text{PB}})^2 \rangle &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} [\langle \hat{\Phi}_{\text{PB}}^2 \rangle - \langle \hat{\Phi}_{\text{PB}} \rangle^2] \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n>n'} \frac{(-1)^{(n-n')}}{(n-n')^2} b_n b_{n'}. \end{aligned} \quad (383)$$

Nawet powierzchowna analiza wzorów (382) i (383) prowadzi do wniosku, że wariancje PB i GW są różne.

Dla stanu fokowskiego  $|f\rangle$ , dla którego  $b_k = \delta_{nk}$ , wariancja (382) redukuje się do funkcji

$$\langle (\Delta \hat{\Phi}_{\text{GW}})^2 \rangle = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \quad (384)$$

Widać, że (384) przyjmuje różne wartości dla różnych  $n$ : dla próżni ( $n = 0$ ) jest równa  $\pi^2/6$ , a w granicy  $n \rightarrow \infty$  dąży do  $\pi^2/3$ . Ten wynik znacznie różni się od wariancji fazy w ujęciu Pegga-Barnetta, która jest stałą równą  $\pi^2/3$  dla dowolnego stanu  $|n\rangle$ . Innymi słowy, w formalizmie PB wszystkie stany fokowskie są o nieokreślonej fazie, natomiast w formalizmie GW żaden ze stanów fokowskich (nawet próżnia) nie ma losowej fazy. Na rys. 24 przedstawiliśmy wariancje fazy, otrzymane w ujęciach GW



Rys. 24:

Wykresy wariancji fazy Pegga-Barnetta  $\langle (\Delta\hat{\Phi}_{\text{PB}})^2 \rangle$  (linie ciągłe) i fazy Garrisona-Wonga  $\langle (\Delta\hat{\Phi}_{\text{GW}})^2 \rangle$  (linie przerywane) w zależności od  $n$  dla stanów fokowskich.

i PB dla stanów fokowskich, w zależności od liczby fotonów  $n$ . Wariancja fazy GW zmierza asymptotycznie (dla dużych  $n$ ) do wartości  $\pi^2/3$ .

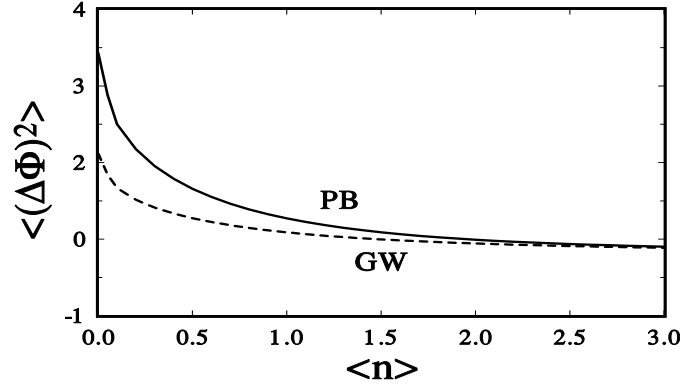
Dla stanów koherentnych współczynniki rozwinięcia  $b_n$  (381) są równe

$$b_n = \exp(-|\alpha|^2/2) \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}}, \quad (385)$$

gdzie  $\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$  jest średnią liczby fotonów [ $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$ ]. Założyliśmy również, że  $\theta = 0$ . Na rys. 25 wariancje fazowe dla stanów koherentnych są wykreślone względem średniej liczby fotonów  $\langle \hat{n} \rangle$ . Widać, że jeśli  $\langle \hat{n} \rangle$  wzrasta, to różnica między wariancjami maleje, tj. dla  $\langle \hat{n} \rangle \gg 1$  dwa formalizmy fazowe dają wyniki nierozróżnialne. Jednak dla  $\langle \hat{n} \rangle \sim 1$  różnice są istotne.

Wariancje fazowe dla stanów koherentnych względem średniej liczby fotonów przedstawiliśmy na rys. 25. Oczywiście nasze wyniki można by wykreślić na rys. 20 przedstawiającym dane doświadczalne Gerhardta i in. [254, 255]. Jednak nie dokonamy tego porównania, z uwagi na wyjątkowo małą liczbę danych pomiarowych (4 punkty) o dużych niepewnościach. Niemniej znanych jest wiele prac (np. [254], [257]- [264]), w których fluktuacje fazowe stanów koherentnych badano w ramach różnych formalizmów fazowych, a wyniki porównywano z danymi doświadczalnymi Gerhardta i in. [254].





Rys. 25:

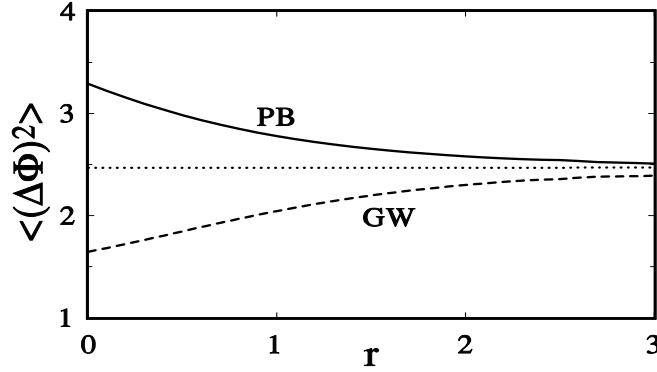
Wykresy wariancji  $\langle(\Delta\hat{\Phi}_{\text{PB}})^2\rangle$  (linie ciągłe) i  $\langle(\Delta\hat{\Phi}_{\text{GW}})^2\rangle$  (linie przerywane) w zależności od średniej liczby fotonów  $\langle n \rangle$  dla stanów koherentnych.

Rozważmy jeszcze szczególny przykład idealnego stanu ścieśnionego – próżnię ścieśnioną, dla której współczynniki  $b_n$  są zdefiniowane następująco [29]

$$b_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{\sqrt{\cosh r}} \frac{\sqrt{n!}}{(n/2)!} \left(\frac{1}{2} \tanh r\right)^{n/2}, & n \text{ parzyste} \\ 0, & n \text{ nieparzyste.} \end{cases} \quad (386)$$

Wariancje dla próżni ścieśnionej są wykreślone względem parametru ścieśniania na rys. 26. Asymptotycznie, dla dużych  $r$ , obydwie wariancje  $\langle(\Delta\hat{\Phi}_{\text{PB}})^2\rangle$  i  $\langle(\Delta\hat{\Phi}_{\text{GW}})^2\rangle$  dążą do  $\pi^2/4$ , ale dla małych  $r$  (w szczególności dla próżni –  $r = 0$ ), znacznie się różnią. Oznacza to, że nieoznaczoność operatora PB jest większa od nieoznaczoności operatora GW. Aby wyjaśnić przyczynę tej rozbieżności przeanalizujemy jeszcze raz rozkłady fazowe w obu ujęciach.

Rozkład fazowy  $P_{\text{GW}}(\theta)$  dla stanów fokowskich może być wyznaczony ze wzorów (364)–(370), a przykłady takich rozkładów zostały podane w artykule Garrisona i Wonga [238]. Na rys. 27 przedstawiliśmy kilka rozkładów  $P_{\text{GW}}(\theta)$  dla stanów fokowskich. Garrison i Wong zauważyli, że rozkład fazowy wykazuje oscylacje o  $n + 1$  maksimum dla stanu  $n$  fotonowego. Nawet dla próżni rozkład posiada maksimum. Oznacza to, że próżnia jest anizotropowa, tzn. ma jakąś wyróżnioną fazę. Przyczyną tej anizotro-

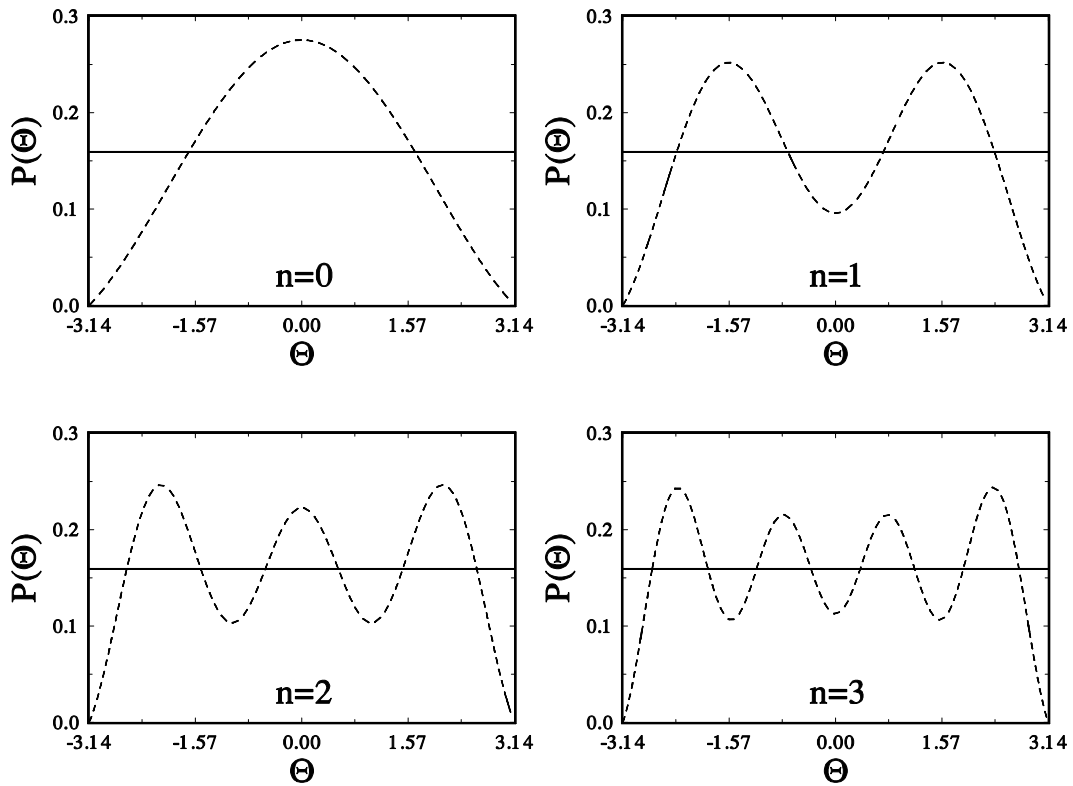


Rys. 26:

Wykresy wariancji  $\langle (\Delta \hat{\Phi}_{PB})^2 \rangle$  (linie ciągłe) i  $\langle (\Delta \hat{\Phi}_{GW})^2 \rangle$  (linie przerywane) względem parametru ścieśniania  $r$  dla próżni ścieśnionej.

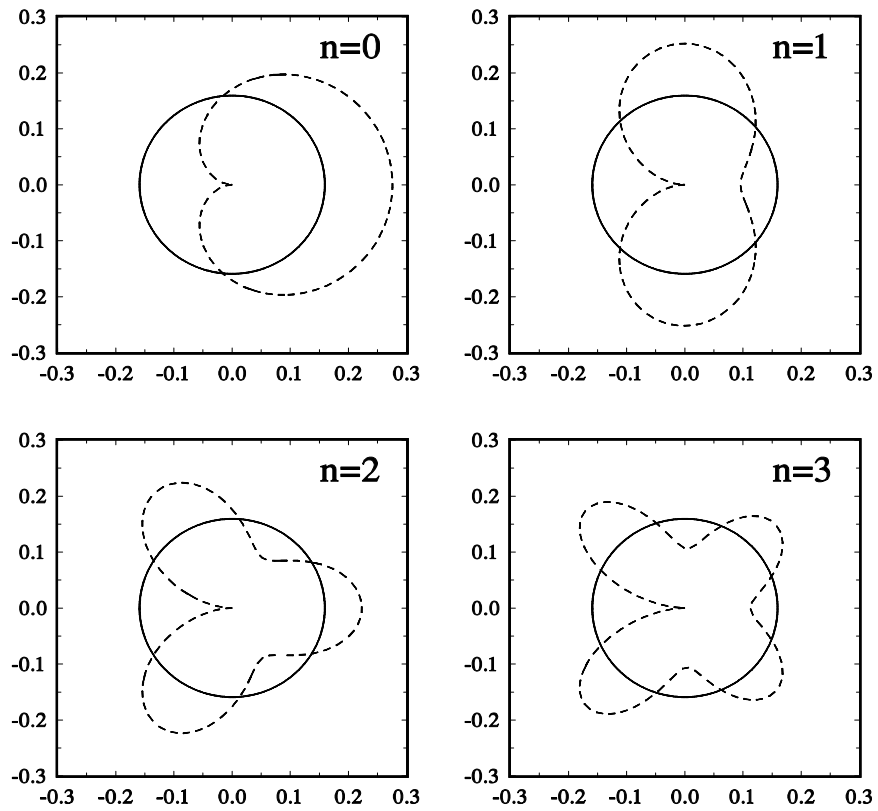
pii jest znikanie rozkładu fazowego GW na krańcach przedziału  $\langle \vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi \rangle = \langle -\pi, \pi \rangle$ , co z kolei jest wnioskiem wypływającym z żądania, aby komutator operatorów: liczby fotonów i fazy (377) był równy  $-i$  (tj.  $f(e^{i\vartheta_0}) = 0$ ). W ten oto sposób, narzucając warunki brzegowe na operator fazowy wprowadzamy anizotropię do rozkładu fazowego. W podejściu PB faza dla wszystkich stanów fokowskich jest rozłożona równomiernie nie wykazując żadnej anizotropii w rozkładach fazowych. Aby lepiej ukazać anizotropię pojawiającą się w ujęciu GW, na rys. 28 przedstawiliśmy wykresy biegunowe rozkładów fazowych dla kilku stanów fokowskich. Rozkład  $P_{PB}(\theta)$  jest oczywiście izotropowy. Symetria rozkładu fazowego GW jest niezgodna z symetrią  $s$ -sparametryzowanych rozkładów fazowych, czy też  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa (w szczególności funkcjami  $Q$  i  $W$ ). Zostawmy problem otwarty, czy anizotropia jest wynikiem czysto matematycznym, czy też ma znaczenie fizyczne.

Na rys. 29 pokazaliśmy rozkłady fazowe dla kilku stanów koherentnych o różnych średnich liczbach fotonów. Po raz kolejny widać, że rozkłady fazowe GW są węższe od odpowiadających im rozkładów PB. Widać także, że te różnice szybko zanikają, gdy średnia liczba fotonów wzrasta. W przypadku stanów koherentnych różnice między



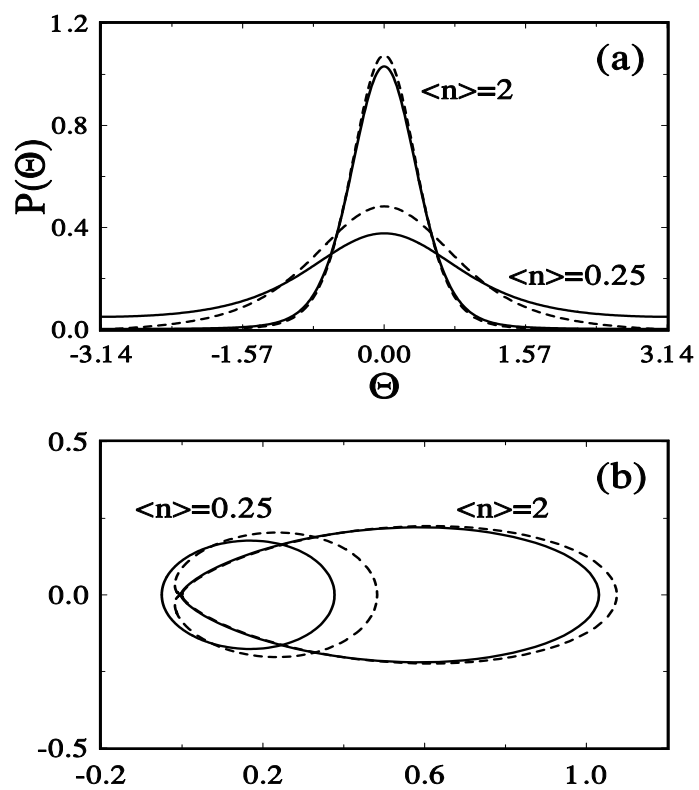
Rys. 27:

Wykresy rozkładów fazowych  $P_{\text{PB}}(\theta)$  (linie ciągłe) i  $P_{\text{GW}}(\theta)$  (linie przerywane) w układzie kartezjańskim dla stanów fokowskich  $|n\rangle = |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |4\rangle$ .



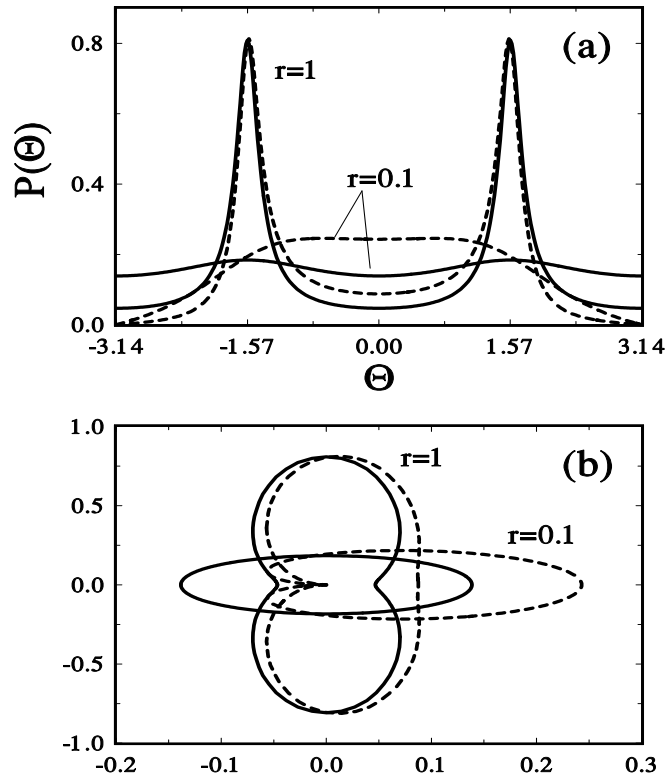
Rys. 28:

Jak na rys. 27, ale w układzie biegunowym.



Rys. 29:

Wykresy rozkładów fazowych  $P_{\text{PB}}(\theta)$  (linie ciągłe) i  $P_{\text{GW}}(\theta)$  (linie przerywane) dla stanów koherentnych o średniej liczbie fotonów  $\langle \hat{n} \rangle = 0.25, 2$ : (a) w układzie kartezjańskim i (b) w układzie biegunowym.



Rys. 30:

Tak jak na rys. 29, ale dla stanów próżni ścięsnionej, gdy  $r = 0.1, 1$ .

rozkładami GW i PB są mniej widoczne niż dla stanów fokowskich, gdyż maksimum występuje w obydwu funkcjach oraz zerowanie się rozkładu GW na krańcach przedziału fazowego ma mniejsze znaczenie.

Rozkłady fazowe dla próżni ścięsnionej przedstawiliśmy na rys. 30. W rozkładach fazowych  $P_{GW}(\theta)$  i  $P_{PB}(\theta)$  pojawiają się po dwa maksima. Wraz ze wzrostem parametru ścięsniania  $r$ , dążą do dwu funkcji delta Diraca w punktach  $\theta = \pm\pi/2$ . Rozważmy symetrię rozkładów fazowych bardziej wyeksponowaną w układzie biegunowym. Jak widać z rys. 30b, rozkład  $P_{GW}(\theta)$  jest asymetryczny w porównaniu do eliptycznego kształtu przekrojów funkcji  $Q$  dla tych stanów. Na rys. 30b zwiększyliśmy skalę wzdłuż osi poziomej, aby wyeksponować tę asymetrię. Rozkład fazowy Pegga-Barnetta wykazuje

dwukrotną symetrię rotacyjną. To jest w pełnej zgodzie z symetrią sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}$  dla tych stanów, jak pokazaliśmy w [64] (zob. paragraf 7.2). W szczególności jest zgodna z symetrią funkcji  $Q$  [29, 320, 321].

Powyższe przykłady pokazują, że rozkłady fazowe w formalizmie Garrisona-Wonga są zawsze węższe od odpowiadających im rozkładów w formalizmie Pegga-Barnetta. To również oznacza, że wariancje fazowe  $\langle(\Delta\hat{\Phi}_{\text{GW}})^2\rangle$  będą mniejsze od  $\langle(\Delta\hat{\Phi}_{\text{PB}})^2\rangle$ . Przyczyną tego zwężenia rozkładów jest warunek  $\langle\vartheta_0|f\rangle = 0$  (375) narzucony na komutator (374), co prowadzi do zerowania się rozkładów fazowych na krańcach przedziału,  $P_{\text{GW}}(\vartheta_0) = P_{\text{GW}}(\vartheta_0 + 2\pi) = 0$ . Aby zachować unormowanie  $P_{\text{GW}}(\theta)$  musi pojawić się maksimum nawet dla stanu próżni. Ten warunek narzuca anizotropię rozkładu fazowego, co jest w sprzeczności z symetrią funkcji fazowych obliczonych z sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}$ , w szczególności z funkcji  $Q$  i Wignera.

Większość wyników zamieszczonych w tym paragrafie opublikowaliśmy w [133]. Do podobnych rezultatów doszli, niezależnie od nas, Barnett i Pegg [322].

## 7 Sparametryzowane rozkłady fazowe

W tym rozdziale omówimy rozkłady fazowe przyporządkowane  $s$ -sparametryzowanym rozkładom *quasi*-prawdopodobieństwa, zwane przez nas  $s$ -sparametryzowanymi rozkładami fazowymi lub  $s$ -sparametryzowanymi marginalnymi rozkładami *quasi*-prawdopodobieństwa<sup>52</sup>. Takie rozkłady fazowe otrzymamy w wyniku całkowania rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}$  po zmiennej „radialnej”.

W celu opisanego stanów fizycznych, stosując terminologię Pegga i Barnetta [132], można wprowadzić ciągły rozkład fazowy. Taki rozkład powinien być znormalizowany i  $2\pi$ -okresowy, aby prawidłowo mógł opisywać własności fazowe pola. Niemniej,  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe są również unormowane i  $2\pi$ -okresowe. Pojawia

---

<sup>52</sup>ang.  $s$ -parametrized phase distributions [associated with  $s$ -parametrized *quasi*-probability distributions], [ $s$ -parametrized] marginal [*quasi*-probability] distributions, integrated distributions, itd.

się interesujące pytanie, do jakiego stopnia sparametryzowane rozkłady fazowe przybliżają rozkład Pegga-Barnetta? W rozdziale 7 omówimy ten problem.

W paragrafie 7.1 przedstawimy jeden z ważniejszych wyników dysertacji – ogólne wzory na sparametryzowane rozkłady fazowe. W paragrafie 7.2 porównamy sparametryzowane rozkłady fazowe z rozkładami fazowymi Pegga-Barnetta dla kilku konkretnych stanów pól: stanów koherentnych, idealnych stanów ścięzionych oraz przesuniętych stanów fokowskich. W paragrafie 7.3 wyznaczmy sparametryzowane rozkłady fazowe dla modelu oscylatora anharmonicznego. Pokażemy, że rozkłady fazowe dobrze opisują dyskretne superpozycje stanów koherentnych. W paragrafie 7.4 udowodnimy, że spośród sparametryzowanych rozkładów fazowych, marginalna funkcja Wignera najlepiej przybliży rozkład fazowy Pegga-Barnetta w opisie propagacji silnego pola o małej dyspersji w ośrodku kerrowskim. W uzupełnieniu  $\mathbf{G}$  wyznaczmy marginalną funkcję  $P$  dla stanów koherentnych wychodząc z naszych ogólnych wzorów na sparametryzowane rozkłady fazowe. Pokażemy tym samym słuszność naszych wzorów na rozkłady marginalne w przypadku granicznym, gdy  $s = 1$ .

Rozkłady fazowe przyporządkowane rozkładom QPD były wykorzystane w analizie własności fazowych różnych stanów pola, m. in. przez Schleicha i in. [323]- [326], Tanaśia ze współpracownikami [60, 47, 49], Garrawaya i Knighta [327, 328] oraz Agarwala i in. [329]. Większość wyników z paragrafów 7.1 i 7.2 zamieściliśmy w artykule [49]. Rezultaty z paragrafu 7.3 w szczególnym przypadku – dla marginalnej funkcji  $Q$ , redukują się relacji, które przedstawiliśmy w artykule [60].

## **7.1 Ogólne wyrażenia na sparametryzowane rozkłady fazowe**

Rozpocniemy rozważania od przypomnienia definicji sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa przedstawionych w paragrafie 1.1. Ograniczymy się do przypadku pól jednomodowych omówionego przez Cahilla i Glaubera [8]. Jednomodową



relację (17) w reprezentacji fokowskiej można wówczas zapisać w prostszej postaci:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^{(s)}(\alpha) &= \sum_{m,n} \rho_{mn} \langle n | T^{(s)}(\alpha) | m \rangle \\
&= \exp\left(-\frac{2|\alpha|^2}{1-s}\right) \sum_{m,n} \rho_{mn} \left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{1-s}\right)^{m-n+1} \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n \\
&\quad \times e^{-i(m-n)\theta} |\alpha|^{m-n} L_n^{m-n} \left(\frac{4|\alpha|^2}{1-s^2}\right),
\end{aligned} \tag{387}$$

gdzie operator  $T^{(s)}(\alpha)$  zdefiniowany jest wzorem (13). W (387) pojawia się faza zespolonej liczby  $\alpha$ :

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta} \tag{388}$$

Faza  $\theta$  będzie traktowana jako wielkość opisująca fazę pola. Podkreślmy raz jeszcze, że w trzech szczególnych przypadkach, gdy  $s = 1, 0, -1$ ,  $s$ -uporządkowane iloczyny kreacji i anihilacji upraszczają się do porządków: normalnego, symetrycznego i antynormalnego. Rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa pozwalające bezpośrednio wyznaczyć średnie tak uporządkowanych operatorów  $\hat{a}^+$  i  $\hat{a}$  są odpowiednio funkcjami:  $P$  Glaubera-Sudarshana,  $W$  Wignera oraz  $Q$  Husimi'ego. Jeśli scałkujemy rozkład *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  po zmiennej „radialnej”  $|\alpha|$ , to otrzymamy „rozkład fazowy” przyporządkowany temu rozkładowi *quasi*-prawdopodobieństwa.  $s$ -Sparametryzowane rozkłady fazowe (marginalne rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa) są zatem określone przez:

$$\begin{aligned}
P^{(s)}(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{W}^{(s)}(\alpha) |\alpha| d|\alpha|. \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \mathcal{W}^{(s)}(W, \theta) dW.
\end{aligned} \tag{389}$$

W drugim ze wzorów (389) całkować należy po intensywności  $W = |\alpha|^2$ . Po podstawieniu (387) do (389) mamy

$$\begin{aligned}
P^{(s)}(\theta) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \rho_{mn} \left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{1-s}\right)^{m-n+1} \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^n e^{-i(m-n)\theta} \\
&\quad \times \int_0^\infty |\alpha|^{m-n} \exp\left(-\frac{2|\alpha|^2}{1-s}\right) L_n^{m-n} \left(\frac{4|\alpha|^2}{1-s^2}\right) |\alpha| d|\alpha|.
\end{aligned} \tag{390}$$

Jeśli skorzystać z definicji uogólnionych wielomianów Laguerre'a, to całkę w (390) można wyliczyć analitycznie. Otrzymujemy następujący  $s$ -sparametryzowany rozkład fazowy:

$$P^{(s)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2\operatorname{Re} \sum_{m>n} \rho_{mn} e^{-i(m-n)\theta} G^{(s)}(m, n) \right\}. \quad (391)$$

Wzór (391) przypomina rozkład fazowy Pegga-Barnetta (358). Współczynnik  $G^{(s)}(m, n)$  występujący w (391) jest dany przez

$$G^{(s)}(m, n) = \left( \frac{2}{1-s} \right)^{\frac{m+n}{2}} \sum_{l=0}^{\min(m,n)} (-1)^l \left( \frac{1+s}{2} \right)^l \times \sqrt{\binom{n}{l} \binom{m}{l}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2} - l + 1\right)}{\sqrt{(m-l)!(n-l)!}}. \quad (392)$$

Wzory (391) i (392) wyprowadziliśmy w artykule [49].

Jeśli skorzystamy z definicji wielomianów Jacobiego  $P_n^{(\nu, \mu)}(x)$  o parametrach  $\nu$  i  $\mu$  rzędu  $n$  [319], to współczynniki (392) możemy zapisać w zwartej formie

$$G^{(s)}(m, n) = (-1)^n \sqrt{\frac{n!}{m!}} \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^n \left( \frac{2}{1-s} \right)^{\frac{m-n}{2}} \times \Gamma\left(\frac{m-n}{2} + 1\right) P_n^{(m-n, -\frac{1}{2}(m+n))} \left( \frac{s-3}{s+1} \right). \quad (393)$$

Wielomiany Jacobiego można wyrazić poprzez funkcje hipergeometryczne (funkcje Gaussa)  ${}_2F_1(a, b, c, x)$ , co pozwala nam na zapisanie współczynników (393) w innej formie:

$$G^{(s)}(m, n) = \sqrt{\frac{m!}{n!}} \frac{1}{(m-n)!} \left( \frac{s+1}{s-1} \right)^n \left( \frac{2}{1-s} \right)^{\frac{m-n}{2}} \times \Gamma\left(\frac{m-n}{2} + 1\right) {}_2F_1\left(-n, \frac{m-n}{2} + 1, m-n+1, \frac{2}{1+s}\right) \quad (394)$$

Jeśli elementy macierzy gęstości  $\rho_{mn}$  są postaci

$$\rho_{m,n} = |\rho_{m,n}| \exp[i(m-n)\theta_0], \quad (395)$$

to rozkład fazowy (391) określimy przez:

$$P^{(s)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(s)} \cos[m(\theta - \theta_0)] \right\}, \quad (396)$$

gdzie współczynniki  $a_m^{(s)}$  są równe

$$a_m^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} |\rho_{m+n,n}| G^{(s)}(m+n, n). \quad (397)$$

Relację (396) wykorzystamy w uzupełnieniu **G**.

Rozważmy szczególnie przypadek sparametryzowanego rozkładu fazowego (392), gdy  $s = -1$  (marginalna funkcja  $Q$ ). Wówczas, jedyny niezerowy składnik sumy (392) ma wskaźnik  $l = 0$  i otrzymujemy następujące wyrażenie

$$G^{(-1)}(m, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2} + 1\right)}{\sqrt{n!m!}}. \quad (398)$$

Powyższy wzór wyprowadziliśmy w pracy [60] w opisie fazowych własności oscylatora anharmonicznego. Gdy  $s = 0$ , to otrzymujemy z (392)–(394) współczynniki  $G^{(0)}(m, n)$  dla marginalnej funkcji Wignera. Ten rozkład był wykorzystany m. in. przez Tanasia i in. [47] w opisie własności fazowych przesuniętych stanów fokowskich. Z kolei dla  $s = 1$  (tj. dla marginalnej funkcji  $P$ ) widać, że współczynniki  $G^{(1)}(m, n)$  dążą do nieskończoności. Wydawać się może, że rozkład fazowy jest wówczas nieokreślony. Jednak jak pokazaliśmy w uzupełnieniu **G** na przykładzie stanów koherentnych, uważne przejście do granicy  $s \rightarrow 1$  pozwala wyznaczyć sparametryzowany rozkład fazowy  $P^{(1)}(\theta)$ .

Marginalna funkcja Wignera, o czym wspomnieliśmy w [49], może przyjmować wartości ujemne dla pewnych stanów, np. dla stanów Titulaera-Glaubera. Garraway i Knight [328] pokazali analitycznie tę własność marginalnej funkcji Wignera dla pewnych skończonych superpozycji stanów fokowskich. Orłowski i Wünsche [330] wysunęli ostatnio hipotezę, że istnieje tylko jeden  $s$ -sparametryzowany rozkład fazowy, który dla dowolnych stanów jest dodatnio określony. Tym rozkładem jest marginalna funkcja  $Q - P^{(-1)}(\theta)$ <sup>53</sup>.

Rozkłady fazowe przypisane rozkładom *quasi*-prawdopodobieństwa były wielokrotnie stosowane w opisie własności fazowych pól promieniowania. Na przykład, marginalna funkcja Wignera ( $s = 0$ ) była wykorzystana przez Schleicha i in. [323, 324] w analizie własności fazowych idealnych stanów ścięśnionych. Braunstein i Caves [331]

---

<sup>53</sup>podkreślamy, że termin „rozkład marginalny” stosujemy wyłącznie w odniesieniu do rozkładów QPD scałkowanych po „promieniu”  $|\alpha|$

zastosowali marginalną funkcję  $Q$  ( $s = -1$ ) do opisu własności fazowych uogólnionych stanów ścięśnionych.

Dla pewnych stanów rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa mogą być przedstawione w zwartej postaci poprzez bezpośrednie całkowanie (2), (13) i (15) tak jak to pokazaliśmy w rozdziale 2, lub rozwiązanie równania Fokkera-Plancka (paragraf 3.1). Kolejne całkowanie  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  po amplitudzie, zgodnie ze wzorem (389), prowadzi do sparametryzowanych rozkładów fazowych. Znaleźliśmy ściśle, zwarte analitycznie wzory określające  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe dla stanów koherentnych, idealnych stanów ścięśnionych oraz przesuniętych stanów fokowskich.

## 7.2 Porównanie sparametryzowanych rozkładów fazowych z rozkładem Pegga-Barnetta

Nasze wzory (391) i (392)–(394) umożliwiają wyliczenie  $s$ -sparametryzowanych rozkładów fazowych dla dowolnego stanu o znanych elementach macierzowych  $\rho_{mn}$ . Co jest istotne, możliwe jest również porównanie z rozkładem Pegga-Barnetta (295), dla którego  $G^{(s)}(m, n) \mapsto 1$ . Postawmy pytanie, czy istnieje taki porządek  $s_{\text{PB}}$ , dla którego spełniony jest warunek

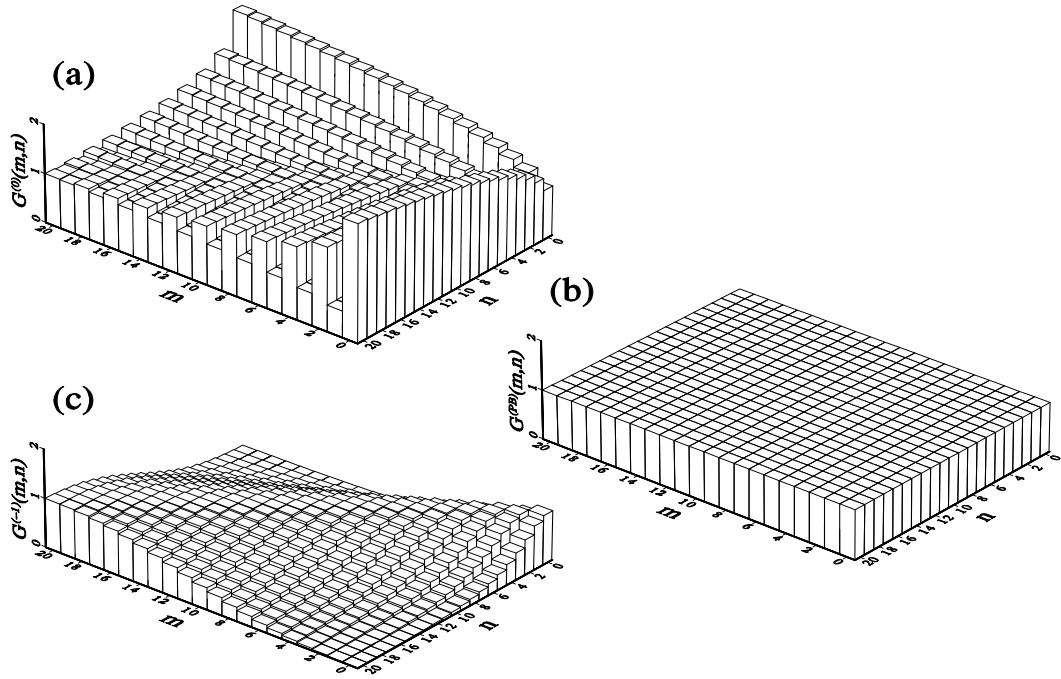
$$G^{(s_{\text{PB}})}(m, n) = 1 \quad (399)$$

przy dowolnych wskaźnikach  $m$  i  $n$ ? Łatwo zauważyć, że dla diagonalnych współczynników  $G^{(s)}(m, m)$ , warunek (399) jest spełniony dla dowolnych  $m$  i  $s$ :

$$G^{(s_{\text{PB}})}(m, m) = 1. \quad (400)$$

Jednak te elementy nie wnoszą przyczynku do rozkładów fazowych. Dla współczynników  $G^{(s)}(m, n)$  o dowolnych wskaźnikach  $m$  i  $n$  nie istnieje taki porządek  $s_{\text{PB}}$ , że warunek (399) jest spełniony ściśle. Rozważmy na przykład elementy postaci  $G^{(s)}(m, 0)$  (lub  $G^{(s)}(0, m)$ ). Z warunku (399) niestety wynika, że parametr  $s_{\text{PB}}$  jest funkcją  $m$ :

$$s_{\text{PB}} = 1 - 2 \left( \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}{\sqrt{m!}} \right)^{2/m}. \quad (401)$$



Rys. 31:  
Rozkłady współczynników: (a)  $G^{(0)}(m, n)$ , (b)  $G^{(\text{PB})}(m, n)$  oraz  
(c)  $G^{(-1)}(m, n)$ .

Do podobnego wniosku można dojść analizując elementy o wskaźniku  $n = 1, 2, 3, \dots$ . To oznacza, że nie ma „fazowego porządku” operatorów pola, tj. takiego porządku  $s_{\text{PB}}$ , dla którego zachodzi (400), a tym samym  $P^{(s_{\text{PB}})}(\theta) = P_{\text{PB}}(\theta)$ .

Postawmy zatem pytanie w zmienionej formie: który z  $s$ -sparametryzowanych rozkładów fazowych jest *najlepszym przybliżeniem* rozkładu fazowego Pegga-Barnetta dla konkretnego stanu pola? Ten problem będziemy analizować na przykładzie konkretnych stanów w §7.2.1–§7.2.3 oraz paragrafach 7.3 i 7.4.

Dla dowolnego pola o znanych elementach fokowskich macierzy gęstości  $\hat{\rho}$ ,  $s$ -sparametryzowany rozkład fazowy może być wyznaczony dzięki naszej relacji (391) ze współczynnikami  $G^{(s)}(m, n)$  określonymi przez (392). Rozkłady współczynników  $G^{(s)}(m, n)$ , dla  $s = 0, -1$ , przedstawiliśmy na rys. 31. Widać, że dla  $s = -1$  (funkcja  $Q$ ) współczynniki monotonicznie maleją jeśli wzrasta  $|m - n|$ . To oznacza, że wszyst-

kie elementy niediagonalne  $\rho_{mn}$  są funkcjami wagowymi mniejszymi niż jedność, zatem marginalny rozkład funkcji  $Q$  jest zawsze szerszy (i niższy) od rozkładu fazowego Pegga-Barnetta (dla którego  $G^{(s)}(m, n) \mapsto 1$ ). Dla  $s = 0$  problem nie jest tak prosty, ponieważ współczynniki wykazują oscylacje wokół wartości jeden. To prowadzi do funkcji fazowej węższej od rozkładu Pegga-Barnetta. Ponadto, ponieważ funkcja Wignera  $\mathcal{W}^{(0)}(\alpha)$  może przyjmować wartości ujemne, to funkcja marginalna Wignera też może być (choć nie zawsze) ujemna. Np. dla przesuniętych stanów fokowskich funkcja Wignera jest dla pewnych  $\alpha$  ujemna, ale jej funkcja marginalna jest dodatnio określona dla dowolnych  $\theta$  [47], w przeciwieństwie do stanów oscylatora anharmonicznego, dla których zarówno funkcja Wignera, jak i jej funkcja marginalna, mogą przyjmować wartości ujemne. Ogólnie mówiąc, marginalna funkcja Wignera może przyjmować wartości ujemne dla stanów z dominującymi elementami  $\rho_{m',n'}$ , o takich wskaźnikach, że  $G^{(0)}(m', n') < 1$ . Pomimo, że nie ma „porządku fazowego”, dla danego stanu można znaleźć taki porządek  $s$ , że rozkłady  $P_{PB}(\theta)$  i  $P^{(s)}(\theta)$  są bardzo podobne. Wzór (391) jest ogólny i jego szczególne przypadki (dla konkretnych: porządków antynormalnego i symetrycznego) były przez nas wykorzystane w opisie własności fazowych oscylatora anharmonicznego [25], a także zastosowane przez Tanasia i współpracowników w analizie parametrycznej konwersji [332] i przesuniętych stanów fokowskich [47]. Niedogodnością wyrażenia (391) jest konieczność numerycznego sumowania, które może być skomplikowane i czasochłonne dla stanów o wolno zbieżnych rozwinięciach w reprezentacji fokowskiej. Tak jest np. dla wysoce ścięśnionych stanów. W pewnych przypadkach, zamiast korzystać z rozwinięć fokowskich, znajdziemy analityczne wzory na  $P^{(s)}(\theta)$  w wyniku bezpośredniego całkowania rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(0)}(\alpha)$ , tak jak to omówiliśmy w paragrafie §7.1. W wielu przypadkach te sparametryzowane rozkłady są dobrymi przybliżeniami rozkładu fazowego Pegga-Barnetta. Wyniki z §§7.2.1–7.2.3 przedstawiliśmy w pracy [49].

Fluktuacje fazowe pola koherentnego były wielokrotnie analizowane w ramach prawie wszystkich formalizmów fazowych. Wymienimy tylko te prace, które istotnie wiążą się z zagadnieniami poruszonymi w niniejszej dysertacji. Są to m. in. artykuły: Bar-

netta i Pegga [247], Bużka i in. [40], Miranowicza, Piątka i Tanasia [277], Agarwala i in. [329] oraz Gantsoga, Miranowicza i Tanasia [133].

Własności fazowe pola koherentnego oddziałującego z oscylatorem anharmonicznym były badane w ramach różnych formalizmów fazowych. Między innymi: Gerry [333] analizował własności fazy Susskinda-Glogowera; Lynch [334] studiował tzw. operatory mierzonej fazy wprowadzone przez Barnetta-Pegga [231]. Najwięcej uwagi poświęcono własnościom fazowym oscylatora anharmonicznego w formalizmie hermitowskiego operatora fazy Pegga-Barnetta. Badania prowadzili m.in.: Gerry [335], Gantsog i Tanaś [197, 196], Paprzycka i Tanaś [200]. Własności fazowe superpozycji stanów koherentnych generowanych w oscylatorze anharmonicznym przedstawiliśmy w artykule [60].

Idealne stany ścięzione były wielokrotnie badane pod kątem własności fazowych. Należy wspomnieć o pracach Sandersa i in. [336], Yao [337], Hong-Yi i Zaidi'ego [338], Grønbecha-Jensena i in. [320], Vaccaro i Pegga [321], Schleicha i in. [323], Cohena i in. [339] oraz Gantsoga, Miranowicza i Tanasia [133].

Własności fazowe przesuniętych stanów fokowskich badali Tanaś i in. [47], Zheng-Fung [48] oraz Tanaś, Miranowicz i Gantsog [49] w ramach formalizmu Pegga-Barnetta, jak również Gantsog, Miranowicz i Tanaś [133] w ramach formalizmu Garrisona-Wonga.

### 7.2.1 Stany koherentne Glaubera

Stosując twierdzenie Bakera-Hausdorffa do ( 22) <sup>54</sup> i następnie rozwijając wyrażenie w szereg Taylora otrzymuje się dobrze znaną reprezentację fokowską stanu koherentnego:

$$|\alpha_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{i\phi_n} |n\rangle, \quad (402)$$

$$b_n = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2\right) \frac{|\alpha_0|^n}{\sqrt{n!}} \quad (403a)$$

$$\phi_n = n \operatorname{Arg}\alpha_0 = n \theta_0. \quad (403b)$$

---

<sup>54</sup>podkreślamy, że tej procedury nie można stosować w przestrzeni  $\Psi$

Współczynniki rozwinięcia  $b_n$  (403a) i  $\phi_n$  (403b), w prosty sposób określają wielorakie rozkłady fazowe i quasi-prawdopodobieństwa, np.: (i)  $s$ -sparametryzowane rozkłady quasi-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}_{coh}^{(s)}$  na mocy (387) równoważne naszej wcześniejszej relacji (25), (ii)  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe  $P_{coh}^{(s)}(\theta)$  dzięki (391); (iii) rozkład fazowy Pegga-Barnetta na mocy (294), co pokazano w [132]; (iv) rozkład fazowy Garrisona-Wonga, i wiele innych. Niestety powyższe rozkłady (za wyjątkiem (25)) są zapisane w postaci wielokrotnych sum nieskończonych.

O wiele łatwiej znaleźć prosty analityczny wzór wychodząc z definicji (21) i stosując bezpośrednio całkowanie opisane w paragrafie 2.1. W ten sposób otrzymaliśmy wzór na  $s$ -sparametryzowany rozkład quasi-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}_{coh}^{(s)}$  (25). Całkowanie funkcji (25) po amplitudzie prowadzi do  $s$ -sparametryzowanego rozkładu fazowego w postaci analitycznie zwartego wyrażenia:

$$\begin{aligned} P_{coh}^{(s)}(\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathcal{W}_{coh}^{(s)}(\alpha) |\alpha| d|\alpha| \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp[-(X_0^2 - X^2)] \{ \exp(-X^2) + \sqrt{\pi} X (1 + \operatorname{erf}(X)) \}, \end{aligned} \quad (404)$$

gdzie

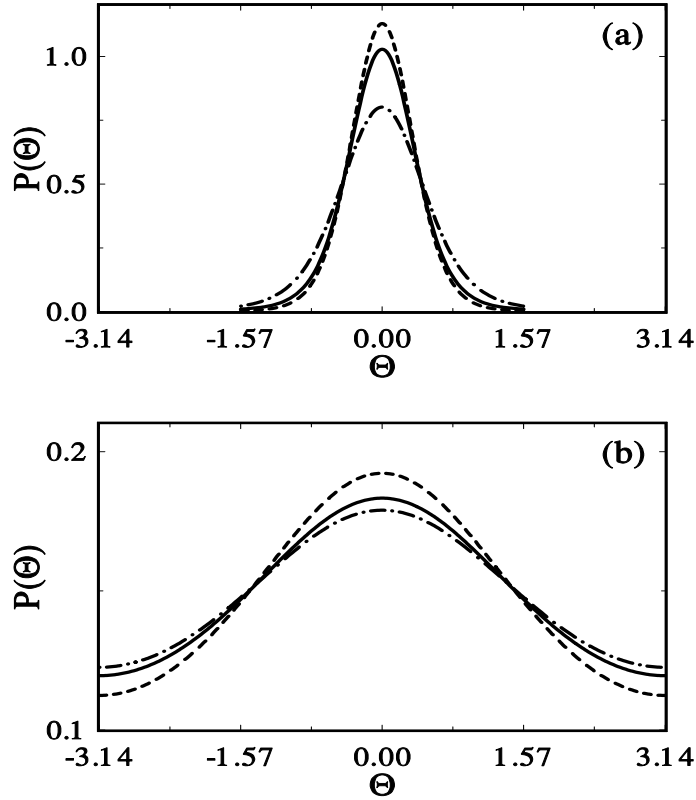
$$X = X^{(s)}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{1-s}} |\alpha_0| \cos(\theta - \theta_0) \quad (405)$$

oraz  $X_0 = X^{(s)}(\theta_0)$ .

Nasze wyrażenie (404) jest dokładne, periodyczne o okresie  $2\pi$ , dodatnio określone i znormalizowane, zatem spełnia wszystkie warunki „prawdziwego” rozkładu prawdopodobieństwa. Ponadto, wzór (404) ma prostą strukturę. Dla małych  $|\alpha_0|$ , pierwszy człon w nawiasach klamrowych odgrywa zasadniczą rolę, w przypadku szczególnym, gdy  $|\alpha_0| \rightarrow 0$  otrzymujemy płaski rozkład fazowy. Dla dużych  $|\alpha_0|$ , drugi człon w nawiasach klamrowych zaczyna dominować, i gdy wstawimy jedność pod funkcję błędu  $\operatorname{erf}(X)$ , to otrzymamy asymptotyczne wyrażenie wyprowadzone przez Schleicha i in. [340] (dla  $s = 0$ )

$$P_{coh}^{(0)}(\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} |\alpha_0| \cos(\theta - \theta_0) \exp[-2|\alpha_0|^2 \sin^2(\theta - \theta_0)], \quad (406)$$





Rys. 32:

Rozkłady fazowe dla stanów koherentnych o średnich liczbach fotonów: **(a)**  $|\alpha_0|^2 = 2$  i **(b)**  $|\alpha_0|^2 = 0.01$ : rozkład Pegga-Barnetta  $P_{PB}(\theta)$  (linia ciągła); marginalna funkcja Wignera  $P^{(0)}(\theta)$  (linia przerywana); i marginalna funkcja Husimiego  $P^{(-1)}(\theta)$  (linia punktowo-przerywana).

Podkreślmy, że wzór Schleicha (406) jest słuszny jedynie dla  $-\pi/2 \leq (\theta - \theta_0) \leq \pi/2$ . Jeśli zlinearyzować (406) względem  $\theta$ , to otrzymuje się przybliżony rozkład dla stanów koherentnych z dużą liczbą fotonów, opisany wzorem Barnetta i Pegga [247]. Występowanie funkcji błędu w naszym wzorze (404) zapewnia prawidłową zależność od fazy w całym przedziale fazowym  $-\pi \leq (\theta - \theta_0) < \pi$ .

Na rys. 32 przedstawiliśmy rozkłady fazowe  $P_{PB}(\theta)$ ,  $P^{(0)}(\theta)$  i  $P^{(-1)}(\theta)$  dla stanów koherentnych z średnią wartością fotonów: (a)  $|\alpha_0|^2 = 2$  oraz (b)  $|\alpha_0|^2 = 0.01$ . Wiadać, że rozkład fazowy Pegga-Barnetta mieści się między marginalną funkcją Wignera

a marginalną funkcją  $Q$ . Staje się bardziej zbliżony do  $P^{(0)}(\theta)$  dla  $|\alpha_0|^2 \gg 1$ . Dla  $|\alpha_0|^2 \ll 1$  – bardziej zbliżony do  $P^{(-1)}(\theta)$ . Gdy  $|\alpha_0|^2 \rightarrow \infty$ , rozkład Pegga-Barnetta dąży do marginalnej funkcji Wignera [323, 132]. Dla  $|\alpha_0|^2 \rightarrow 0$  wszystkie trzy rozkłady stają się jedną funkcją płaską, ale rozkład Pegga-Barnetta w tym zakresie szybciej się zbliża do marginalnej funkcji  $Q$ , niż do marginalnej funkcji Wignera. Oznacza to, że dla stanów koherentnych o dużej liczbie fotonów,  $P^{(0)}(\theta)$  jest dobrą aproksymacją rozkładu fazowego Pegga-Barnetta, podczas gdy dla małej liczby fotonów,  $P^{(-1)}(\theta)$  lepiej aproksymuje rozkład Pegga-Barnetta.

### 7.2.2 Idealne stany ścieśnione

W celu wyznaczenia rozkładu fazowego Pegga-Barnetta  $P_{PB}(\theta) \equiv P_{sq}(\theta)$  skorzystamy ze wzoru ( 294) ze współczynnikami  $b_n$  danymi przez [29]:

$$b_n = \langle n | \alpha_0, \zeta \rangle = \frac{1}{\sqrt{n! \cosh r}} \left[ \frac{1}{2} e^{2i\eta} \tanh r \right]^{n/2} H_n \left[ \frac{\alpha_0 + \alpha_0^* e^{2i\eta} \tanh r}{\sqrt{2e^{2i\eta} \tanh r}} \right] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [|\alpha_0|^2 + \alpha_0^{*2} e^{2i\eta} \tanh r] \right\}. \quad (407)$$

Przyjmijmy, że  $\eta = 0$ . Wyniki dla  $\eta = \pi/2$  otrzyma się z (407) poprzez zamianę  $r$  na  $(-r)$ . Oczywiście w prosty sposób można wyliczyć inne rozkłady, np.  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$ ,  $P^{(s)}(\theta)$ ,  $P_{GW}(\theta)$  i  $P(n)$ .

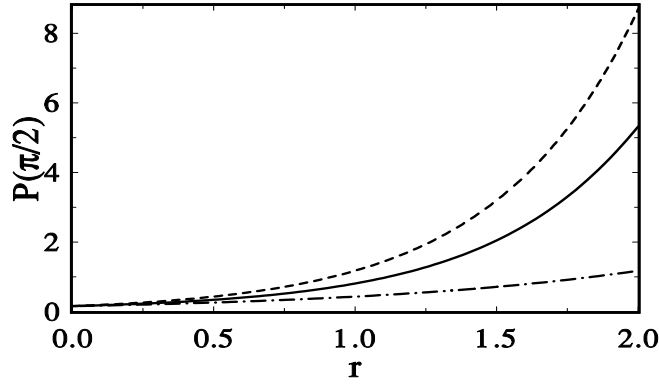
Aby otrzymać analitycznie zwarte wyrażenie na sparametryzowany rozkład fazowy  $P_{sq}^{(s)}(\theta)$  scałkowaliśmy nasz wzór (29) po amplitudzie, co prowadzi (przy  $\eta = 0$ ) do:

$$P_{sq}^{(s)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\mu - s)(\mu^{-1} - s)}}{(\mu - s) \cos^2 \theta + (\mu^{-1} - s) \sin^2 \theta} \times \exp[-(X_0^2 - X^2)] \{ \exp(-X^2) + \sqrt{\pi} X (1 + \operatorname{erf}(X)) \}, \quad (408)$$

gdzie

$$X = X^{(s)}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\mu^{-1} - s}} \frac{\alpha_0 \sqrt{\mu - s} \cos \theta}{\sqrt{(\mu - s) \cos^2 \theta + (\mu^{-1} - s) \sin^2 \theta}}. \quad (409)$$

Chociaż zmienna  $X$  dla tych stanów różni się nieznacznie od (405) dla stanów koherentnych, to jednak główne cechy rozkładu fazowego (404) są zachowane. Wzór ( 408)



Rys. 33:

Wartości maksimum rozkładów fazowych w zależności od parametru  $r$  ścieśnienia próżni. Znaczenie linii takie samo jak na rys. 32.

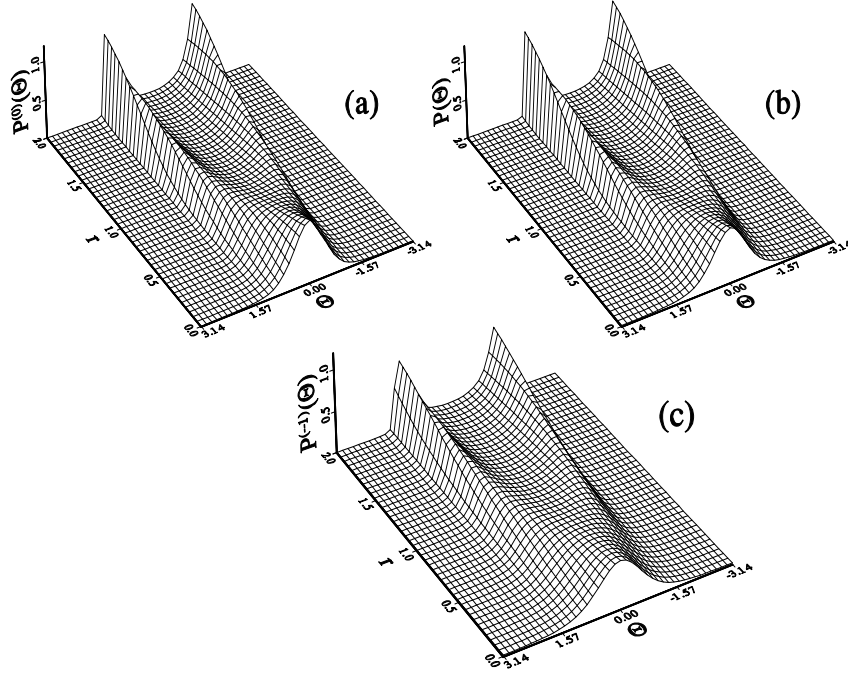
jest słuszny zarówno dla małych jak i dużych  $\alpha_0$ . Po zastosowaniu odpowiedniego przybliżenia można łatwo otrzymać wyrażenie Schleicha i in. [323] dla wysoce ścieśnionych stanów. Podobnie jak w poprzednim przypadku, nasz wynik jest dokładny i słuszny w całym przedziale fazowym. Gdy  $\alpha_0 = 0$ , to otrzymujemy zależność dla ścieśnionej próżni:

$$P_{sq}^{(s)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\mu - s)(\mu^{-1} - s)}}{(\mu - s) \cos^2 \theta + (\mu^{-1} - s) \sin^2 \theta}, \quad (410)$$

gdzie  $\mu = \exp(2r)$ . Ten rozkład posiada dwa maksima w punktach  $\theta = \pm\pi/2$  (dla  $r > 0$ ). Łatwo pokazać, że wartości maksimum są równe

$$P_{sq}^{(s)}(\pi/2) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu - s}{\mu^{-1} - s}}, \quad (411)$$

co oznacza, że dla  $s = 0$  wysokość maksimum jest proporcjonalna do  $\mu$ . Na rys.33 pokazaliśmy zależność wartości maksimum od parametru ścieśniania  $r$ . Widać, że rozkład Pegga-Barnetta leży między rozkładami o parametrach  $s = 0$  i  $s = -1$ , chociaż krzywe te rozbiegają się dla dużych  $r$ . Wszystkie trzy krzywe posiadają strukturę o dwóch maksimach. Pomimo podobieństwa jakościowego, pojawiają się różnice ilościowe: największe maksima osiąga rozkład  $P^{(0)}(\theta)$ , a najmniejsze – rozkład  $P^{(-1)}(\theta)$ . Z uwagi



Rys. 34:

Wykresy fazowych bifurkacji dla stanów ścięśnionych o średniej liczbie fotonów  $|\alpha_0|^2 = 1$ . Zaznaczono następujące rozkłady fazowe: **(a)**  $P^{(0)}(\theta)$ , **(b)** r. Pegga-Barnetta i **(c)**  $P^{(-1)}(\theta)$ .

na unormowanie, powyższa własność pociąga za sobą, że najwęższym rozkładem (lub o najwęższych elementach struktury) jest  $P^{(0)}(\theta)$ , natomiast najszerszym jest rozkład  $P^{(-1)}(\theta)$ .

Dla stanów ścięśnionych z różnym od zera operatorem przesunięcia, pojawia się dodatkowy czynnik w identycznej postaci jak dla stanów koherentnych. Ten dodatkowy czynnik wprowadza maksimum dla  $\theta = 0$ . Jak widać, pojawiają się dwie konkurencyjne zależności rozkładu  $P_{sq}^{(s)}(\theta)$  od dwóch omówionych czynników: z jednej strony pojawia się struktura o dwóch maksimach dla ścięśnionej próżni, a z drugiej – struktura o jednym maksimum dla czynnika koherentnego. Te wkłady prowadzą do bifurkacji rozkładu fazowego omówionej przez Schleicha i in. [323, 324]. Na rys.34 przedstawiamy taką bifurkację (dla  $\alpha_0 = 1$ ), pojawiającą się we wszystkich trzech rozkładach. Rysunki przedstawiliśmy w tej samej skali, aby podkreślić różnice. Jakościowo wykresy wydają

się bardzo podobne, a różnice są jedynie w szerokościach (i wysokościach) rozkładów.

### 7.2.3 Przesunięte stany fokowskie

Przesunięte stany fokowskie omówione w §2.1, mają następującą postać w bazie stanów  $|n\rangle$ :

$$|\alpha_0, n_0\rangle = \sum_n b_n e^{i\phi_n} |n\rangle, \quad (412)$$

gdzie amplitudy  $b_n$  i fazy  $\phi_n$  są równe:

$$\begin{aligned} b_n &= \langle n | \hat{D}(\alpha_0) | n_0 \rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2\right) \left(\frac{n_-!}{n_+!}\right)^{1/2} (-1)^{n_+ - n} |\alpha_0|^{n_+ - n_-} L_{n_-}^{n_+ - n_-}(|\alpha_0|^2), \end{aligned} \quad (413)$$

$$n_- = \min\{n, n_0\} \quad (414)$$

$$n_+ = n + n_0 - n_-$$

$$\phi_n = (n - n_0) \text{Arg}\alpha_0 = (n - n_0)\theta_0 \quad (415)$$

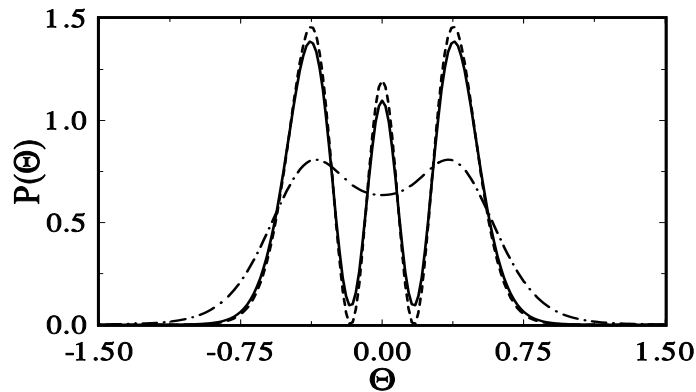
Nasza relacja (413) łączy w jedną całość dwa wzory przedstawione w [47] (cf. [8]). Znając  $b_n$  i  $\phi_n$  można w *bezpośredni* sposób otrzymać różnorodne rozkłady fazowe i *quasi*-prawdopodobieństwa, np. rozkład Pegga-Barnetta na mocy (294). Jak już podkreślaliśmy, w ten sposób liczone rozkłady mają postać wielokrotnych sum. Rzadko kiedy udaje się zsumować te wyrażenia.

Korzystając z rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa (32) wyznaczyliśmy *zwarty* analityczny wzór na *s*-sparametryzowany rozkład fazowy  $P_{dn}^{(s)}(\theta)$ :

$$\begin{aligned} P_{dn}^{(s)}(\theta) &= \left(\frac{2}{1-s}\right)^{n_0} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{(-1)^{n_0-k}}{k!} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n_0-k} \binom{n_0}{k} \\ &\times \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{N_{k-l}(2k-2l)!}{2^{2k-2l}(k-l)!} (X_0^2 - X^2)^l P_{k-l}(X), \end{aligned} \quad (416)$$

gdzie

$$\begin{aligned} P_{n_0}(X) &= \frac{N_{n_0}^{-1}}{2\pi} \exp[-(X_0^2 - X^2)] \\ &\times \{ \exp(-X^2) Q_{n_0}(X) + \sqrt{\pi} X (1 + \text{erf}(X)) \}, \end{aligned} \quad (417)$$



Rys. 35:  
Rozkłady fazowe dla przesuniętych stanów fokowskich o  $n_0 = 2$  i  $\alpha_0 = 3$ .  
Znaczenie linii takie samo jak na rys. 32.

$$Q_{n_0}(X) = \frac{2^{2n_0}(n_0!)^2}{(2n_0)!} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} X^{2k} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{2^{2k} k!}{(2k)!} X^{2k}, \quad (418)$$

oraz stała normalizacji jest równa

$$\begin{aligned} N_{n_0} &= 1 + \exp(-X_0^2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [Q_{n_0}(X(\theta)) - 1] d\theta \\ &= 1 + \exp(-X_0^2) \left\{ -1 + \frac{2^{2n_0}(n_0!)^2}{(2n_0)!} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^3} X_0^{2k} - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k!} X_0^{2k} \right\}. \end{aligned} \quad (419)$$

Zmienna  $X$  w tym przypadku jest równa

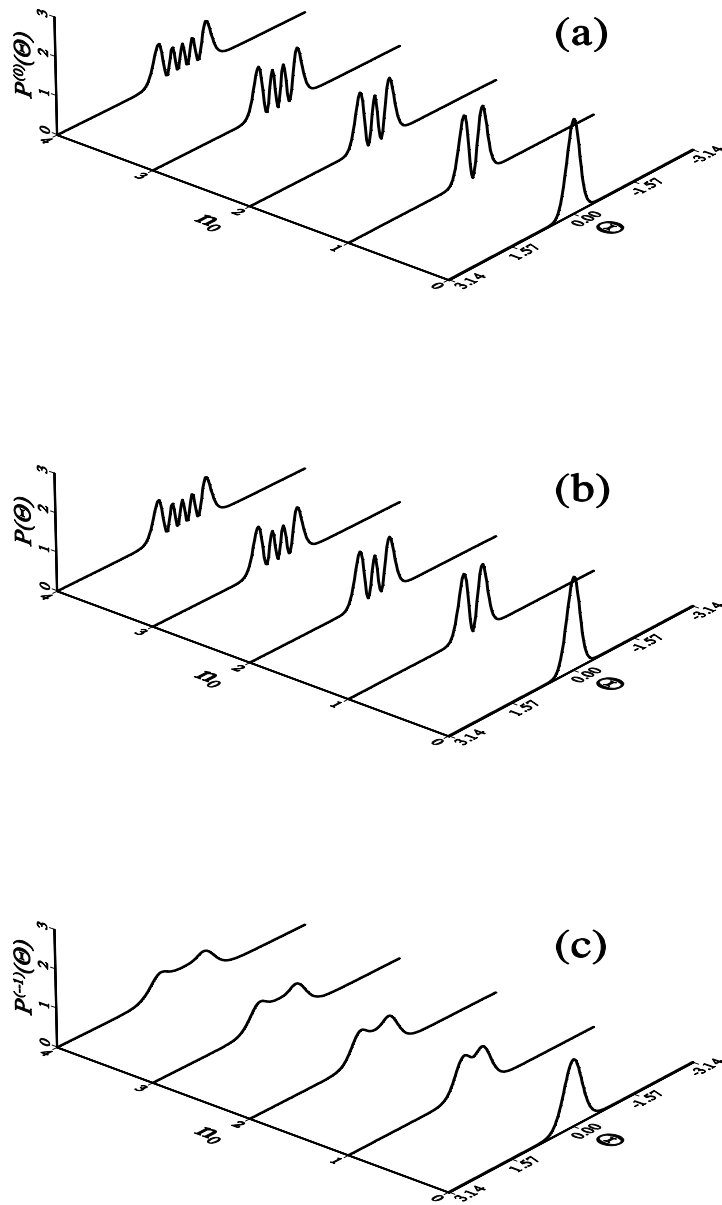
$$X = X^{(s)}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{1-s}} \alpha_0 \cos \theta. \quad (420)$$

Ponadto założyliśmy, że  $\alpha_0$  jest rzeczywista. Pomimo skomplikowanej struktury, wzór (416) zawiera funkcję fazową  $P(X)$ , która posiada główne cechy poprzednich rozkładów fazowych (404) i (417).

W poprzednich paragrafach przedstawiliśmy kilka numerycznych przykładów ilustrujących różne rozkłady fazowe. Dla stanów koherentnych oraz idealnych stanów ścięzionych nie było żadnej jakościowej różnicy między sparametryzowanymi rozkładami fazowymi a rozkładem Pegga-Barnetta. Można by wyciągnąć wniosek, że przynajmniej

jakościowo omawiane rozkłady fazowe niosą tę samą informację na temat fazy. Jednak powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe dla wszystkich stanów. Koronnym przykładem mogą być przesunięte stany fokowskie. Fazowe własności tych stanów omówił Tanaś i in. [47], korzystając z marginalnej funkcji Wignera – szczególnego przypadku naszego wzoru (391). Pokazano, że istnieje jakościowa różnica między marginalną funkcją  $Q$  z jednej strony, a z drugiej – rozkładem Pegga-Barnetta i marginalną funkcją Wignera. Rozkład fazowy  $P^{(-1)}(\theta)$  nie zawiera pełnej informacji fazowej. Różnice można łatwo zinterpretować jako interferencję w przestrzeni fazowej, zgodnie z ideą zaproponowaną przez Schleicha i Wheelera [341]. Możliwość głębszej analizy struktury  $s$ -sparametryzowanego rozkładu fazowego daje nam wzór (408). Rozkład  $P_{dn}^{(s)}(\theta)$  powstaje w wyniku konkurencyjnego wpływu funkcji  $P_{n_0}(X)$  o maksimum w  $\theta = 0$  oraz funkcji  $(X_0^2 - X^2)^l$  o dwóch maksimach w  $\theta = \pm\pi/2$ . Dla  $s = -1$  pozostaje jedynie człon o wskaźnikach spełniających warunek  $n_0 - k = 0$ . Nie ma wówczas modulacji wywołanej czynnikiem  $(-1)^{n_0-k}$ . To jest przyczyna, dla której marginalna funkcja  $Q$  ma jedynie dwa maksima ( $n_0 \neq 0$ ), bez względu na to jak duże jest  $n$ . Zarówno funkcja Pegga-Barnetta, jak i marginalna funkcja Wignera  $P_{dn}^{(0)}(\theta)$  posiadają  $n_0 + 1$  maksimów. Warto wspomnieć, że chociaż funkcja Wignera [(32) dla  $s = 0$ ] oscyluje między dodatnimi i ujemnymi wartościami, rozkład fazowy (408) jest dodatnio określony.

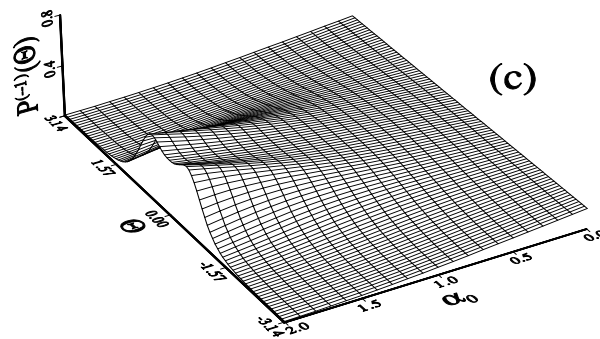
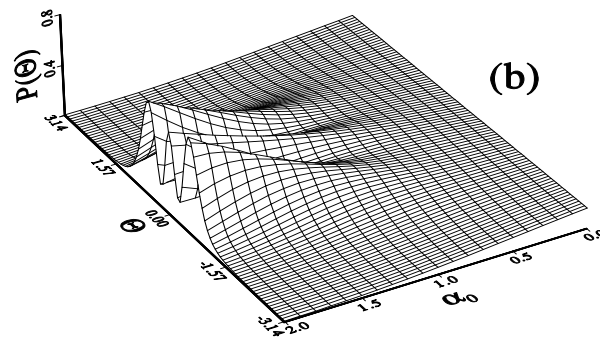
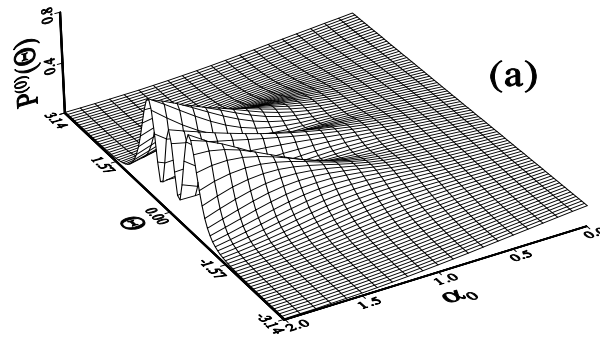
Na rys. 35 zilustrowaliśmy różnice między rozkładami fazowymi dla przesuniętych stanów  $n_0 = 2$  i  $|\alpha_0|^2 = 9$ . Widać, że rozkład Pegga-Barnetta jest bardzo zbliżony do  $P_{dn}^{(0)}(\theta)$ , i niesie w zasadzie tę samą informację o własnościach fazowych stanów, w przeciwieństwie do rozkładu  $P_{dn}^{(-1)}(\theta)$ . Bardziej przekonująco pokazaliśmy te różnice na rys. 36 dla przesuniętych stanów fokowskich o  $n_0 = 0, \dots, 4$ . Rozkłady  $P_{PB}(\theta)$  i  $P^{(0)}(\theta)$  są bardzo do siebie podobne tak, że dla konkretnego  $n_0$  mają tę samą liczbę  $(n_0 + 1)$  maksimów. Natomiast rozkład  $P^{(-1)}(\theta)$  wyraźnie różni się od powyższych jako, że ma co najwyżej dwa maksima, które stają się coraz szersze w miarę wzrostu  $n_0$ . Do podobnych wniosków dochodzimy analizując rys. 37.



Rys. 36:

Rozkłady fazowe dla przesuniętych stanów fokowskich o  $n_0 = 0, \dots, 4$  i  $\alpha_0 = 3$ . Zaznaczono następujące rozkłady fazowe: (a)  $P^{(0)}(\theta)$ , (b) r. Pegga-Barnetta i (c)  $P^{(-1)}(\theta)$ .





Rys. 37:

Tak jak na rys. 36, ale dla  $\alpha_0 \in \langle 0, 2 \rangle$  przy ustalonym  $n_0 = 2$ .

### 7.3 Rozkłady fazowe w opisie dyskretnej superpozycji stanów koherentnych

W §2.2 opisaliśmy ewolucję oscylatora anharmonicznego. Początkowy glauberowski stan koherentny przechodzi w uogólniony stan koherentny, tzw. stan koherentny Titulaera-Glaubera (41). W §4.1 analizowaliśmy powstawanie dyskretnej superpozycji stanów rozróżnialnych makroskopowo. Wykorzystaliśmy  $s$ -sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  do graficznego przedstawienia stanów superpozycji. W tym paragrafie posłużymy się  $s$ -sparametryzowanymi rozkładami fazowymi  $P^{(s)}(\theta)$  oraz rozkładem Pegga-Barnetta  $P(\theta)$  w celu opisanie tych stanów. W artykule [60] przedstawiliśmy analizę marginalnej funkcji  $Q$  i rozkładu  $P(\theta)$  jako graficznych reprezentacji stanów superpozycji. Teraz pragniemy uogólnić nasz opis [60] na przypadek dowolnie  $s$ -sparametryzowanych rozkładów fazowych. Własności fazowe oscylatora anharmonicznego były badane w ramach formalizmu fazowego Pegga-Barnetta także przez Gerry'ego [335], Gantsoga i Tanasia [197, 196] oraz Paprzycką i Tanasia [200]. Gerry [333] badał fluktuacje fazowe pola koherentnego oddziałującego z oscylatorem anharmonicznym także w ramach formalizmu fazowego Susskinda-Glogowera. Lynch [334] do opisu własności fazowych oscylatora anharmonicznego wykorzystał tzw. operatory mierzonej fazy <sup>55</sup> wprowadzone przez Barnetta i Pegga [231]. Naszym celem jest wyeksponowanie własności fazowych dla superpozycji stanów koherentnych, a te wyniki, częściowo zamieszczone w naszym artykule [60], są oryginalne.

Zgodnie z opisem przedstawionym w §4.1, przy szczególnym wyborze czasu (drogi) ewolucji, stan koherentny Titulaera-Glaubera  $|\psi\rangle$  staje się superpozycją stanów koherentnych

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} c_k |e^{i\phi_k} \alpha_0\rangle \quad (421)$$

o współczynnikach superpozycji  $c_k$  określonych m. in. przez (149). Pragniemy, aby wyniki przedstawione w tym paragrafie odpowiadały w szczególnych przypadkach wzorom

---

<sup>55</sup>ang. measured phase operators

podanym przez nas w artykule [60] oraz wynikiom uzyskanym przez Gerry'ego [335], Gantsoga i Tanasia [197] (także [196]). W tym celu będziemy konsekwentnie stosować wersję „normalną” oscylatora anharmonicznego, tj. model opisany hamiltonianem (33c).

W paragrafie 4.1 pokazaliśmy, że do opisu superpozycji stanów można posłużyć się  $s$ -sparametryzowanymi rozkładami *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha, \tau)$ . Nasze wzory (42) i (45) (słuszne dla dowolnej chwili  $\tau$ ) przechodzą, gdy czas jest równy  $\tau = (M/N)2\pi$ , do postaci (177) ukazującej explicite strukturę stanów superpozycji.

Inną reprezentacją stanu pola, dobrze opisującą różnorodne własności stanów kwantowych, jest rozkład fazowy Pegga-Barnetta  $P(\theta)$ . W ramach formalizmu hermitowskiego operatora fazy podanego przez Pegga i Barnetta (vide §5.1), amplituda prawdopodobieństwa fazy (przybierającej wartości  $\vartheta_m$ ) dla stanu (421) jest dana wzorem [335]

$$\langle \vartheta_m | \psi(\tau) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma+1}} \sum_{n=0}^{\sigma} b_n \exp \left\{ i \left[ n(\theta_0 - \vartheta_m) + \frac{\tau}{2} n(n-1) \right] \right\}, \quad (422)$$

a stąd fazowe prawdopodobieństwo jest równe

$$\begin{aligned} |\langle \vartheta_m | \psi(\tau) \rangle|^2 &= \frac{1}{\sigma+1} + \frac{2}{\sigma+1} \sum_{n'>n}^{\sigma} b_n b_{n'} \\ &\times \cos \left\{ (n' - n)(\theta_0 - \vartheta_m) + \frac{\tau}{2} [n'(n' - 1) - n(n - 1)] \right\}. \end{aligned} \quad (423)$$

We wzorach (422) i (423) zastosowaliśmy oznaczenie

$$b_n = \exp(-|\alpha_0|^2/2) \frac{|\alpha_0|^n}{\sqrt{n!}}. \quad (424)$$

W granicy, gdy  $\sigma$  dąży do nieskończoności, można wprowadzić ciągłą zmienną fazową  $\theta$  [246, 132, 247]. Wówczas dyskretny rozkład fazowy (423) staje się następującym ciągłym rozkładem fazowym:

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m>n} b_m b_n \right. \\ &\times \left. \cos \left[ (m - n)(\theta_0 - \theta) + \frac{\tau}{2} (m(m - 1) - n(n - 1)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (425)$$

otrzymanym przez Gantsoga i Tanasia [197]. Gdy  $\tau = 0$ , wzór (425) opisuje rozkład fazowy dla stanu koherentnego  $|\alpha_0\rangle$ , który jest przykładem stanu *pseudo*-fazowego (zob. notkę na stronie 132). W tym przypadku rozkład fazowy  $P(\theta)$  posiada maksimum w punkcie  $\theta = \theta_0$ , gdzie  $\theta_0$  jest fazą  $\alpha_0$ . Własności fazowe stanów oscylatora anharmonicznego dla  $\tau \neq 0$  zostały omówione przez Gerry'ego [335] oraz Gantsoga i Tanasia [197]. Tutaj zajmiemy się jedynie szczególnymi momentami ewolucji  $\tau$ , określonymi jako wymierne ułamki okresu  $T = 2\pi$ . Wówczas stan pola może być zapisany w postaci (421), co prowadzi nas do następującego rozkładu fazowego

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k,l=0}^{N-1} c_k c_l^* \sum_{m,n=0}^{\infty} b_m b_n \exp [im(\phi_k + \theta_0 - \theta) - in(\phi_l + \theta_0 - \theta)]. \quad (426)$$

Podobnie, jak to uczyniliśmy w przypadku *s*-sparametryzowanych rozkładów fazowych w §4.1, rozdzielimy  $P(\theta)$  na dwie części:

$$P(\theta) = P_0(\theta) + P_{int}(\theta), \quad (427)$$

gdzie

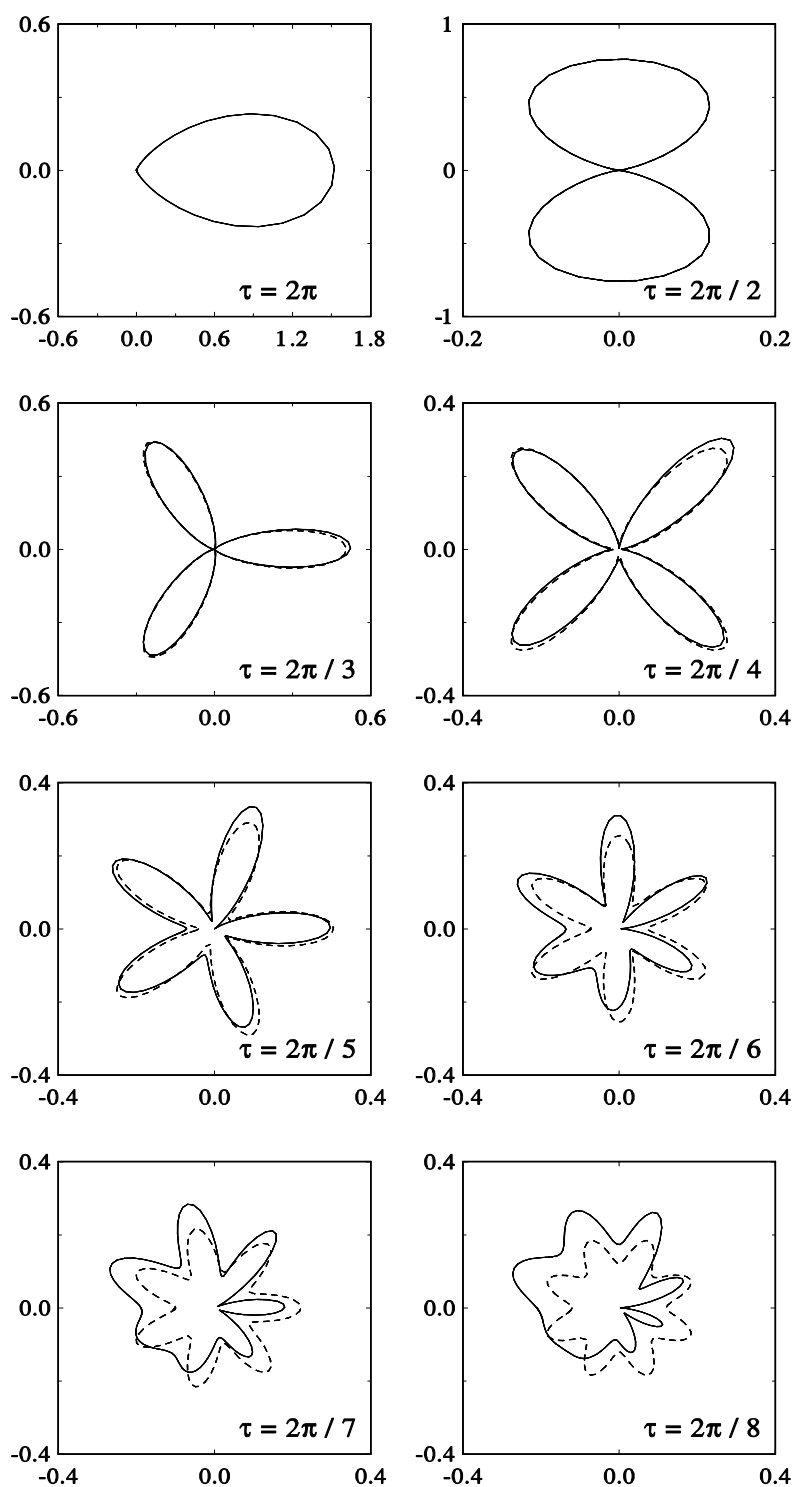
$$\begin{aligned} P_0(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \left\{ 1 + 2 \sum_{m>n} b_m b_n \cos [(m-n)(\phi_k + \theta_0 - \theta)] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 P_k(\theta) \end{aligned} \quad (428)$$

jest częścią opisującą sumę rozkładów fazowych pojedynczych stanów koherentnych (stanów *pseudo*-fazowych) tworzących superpozycję oraz

$$P_{int}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq l}^{N-1} c_k c_l^* \sum_{m,n} b_m b_n \exp [im(\phi_k + \theta_0 - \theta) - in(\phi_l + \theta_0 - \theta)] \quad (429)$$

jest częścią reprezentującą człony interferencyjne w rozkładzie fazowym.

Porównując (428) i (429) ze wzorami (178) i (179) (w szczególności (181) i (182)) łatwo zauważyć, że maksima rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}$ , jak i rozkładu Pegga-Barnetta  $P(\theta)$  pojawiają się, gdy  $\theta = \phi_k + \theta_0$ . To oznacza, że dla dobrze rozdzielonych stanów, tj. gdy człony interferencyjne są pomijalnie małe, powyższe rozkłady powinny mieć tę samą symetrię rotacyjną. Jest to dobrze widoczne na wykresach 4 (także 3) dla funkcji  $Q$



Rys. 38:

Rozkład fazowy Pegga-Barnetta  $P(\theta)$  w układzie biegunowym dla dyskretnej superpozycji stanów koherentnych o  $N=1-8$  składnikach. Linie ciągłe odpowiadają dokładnym wynikom, natomiast przerywane odpowiadają wartościom przybliżonym  $P_0(\theta)$ .

( $s = -1$ ), a z drugiej strony na rys. 38 dla  $P(\theta)$ . Na rys. 4 i 38 liniami ciągłymi zaznaczyliśmy dokładne wartości rozkładów, wyznaczone odpowiednio z (177) [lub (43) i (46)] oraz (427) [lub (425) i (426)]. Z kolei linie przerywane odpowiadają wartościom przybliżonym  $\mathcal{W}_0^{(-1)}$  (181) i  $P_0(\theta)$  (428). Jak widać na wykresach, przybliżone wzory dobrze oddają dokładne wyniki. Szczególnie dobrze, gdy liczba wierzchołków nie jest większa od  $N_{max}$  (maksymalnej liczby dobrze rozróżnialnych wierzchołków) (189). Wyniki przedstawiliśmy dla  $|\alpha_0| = 2$ .

Ta sama symetria rotacyjna rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}$  i  $P(\theta)$  dla dobrze rozdzielonych stanów wynika z faktu, że fazy  $\phi_k$  dla składowych stanów, określone wzorem (141), dzielą  $2\pi$  na  $N$  części. W ten sposób określona jest  $N$ -krotna symetria zarówno dla rozkładu fazowego Pegga-Barnetta  $P(\theta)$  jak i  $s$ -sparametryzowanych rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$ . Podobieństwo opisu jest jeszcze bardziej uderzające, jeśli zamiast  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  wyznaczyć ich rozkłady marginalne, tj.  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe  $P^{(s)}(\theta)$  (391). W przypadku omawianej ewolucji oscylatora anharmonicznego otrzymujemy

$$P^{(s)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m>n} b_m b_n G^{(s)}(m, n) \times \cos \left[ (m-n)(\theta_0 - \theta) + \frac{\tau}{2} (m(m-1) - n(n-1)) \right] \right\}, \quad (430)$$

gdzie współczynniki  $G^{(s)}(m, n)$  określone są przez nasze wyrażenia (392), (393) i (394). W przypadku szczególnym, dla  $s = -1$ , wzór (430) redukuje się do postaci

$$P^{(-1)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m>n} b_m b_n (m! n!)^{-1/2} \Gamma \left( \frac{m+n}{2} + 1 \right) \times \cos \left[ (m-n)(\theta_0 - \theta) + \frac{\tau}{2} (m(m-1) - n(n-1)) \right] \right\}. \quad (431)$$

Wzór (431) przedstawiliśmy w [60]. Wyrażenia (430) na  $P^{(s)}(\theta)$  i (425) na rozkład fazowy Pegga-Barnetta wykazują uderzające podobieństwo. Jak już podkreślaliśmy w §7.1, różnica polega na występowaniu w (430) członu  $G^{(s)}(m, n)$ . Wzory (430), (431) i (425) są słuszne dla dowolnej chwili  $\tau$ . Rozważmy ewolucję w szczególnych chwilach  $\tau = (M/N)/T$ , gdy tworzą się superpozycje stanów koherentnych. Wówczas sparametryzowane rozkłady fazowe  $P^{(s)}(\theta)$  możemy zapisać w postaci

$$P^{(s)}(\theta) = P_0^{(s)}(\theta) + P_{int}^{(s)}(\theta) \quad (432)$$

tak jak to uczyniliśmy w przypadku rozkładów  $P(\theta)$  i  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$ . Część  $P_0^{(s)}(\theta)$  opisująca sumę rozkładów dla składowych stanów koherentnych superpozycji jest określona wzorem

$$\begin{aligned} P_0^{(s)}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \left\{ 1 + 2 \sum_{m>n} b_m b_n G^{(s)}(m, n) \cos[(m-n)(\phi_k + \theta_0 - \theta)] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 P_k(\theta). \end{aligned} \quad (433)$$

Po wysumowaniu (433) otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_0^{(s)}(\theta, M/N T) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \exp[-(\bar{X}_k^2 - X_k^2)] \\ &\quad \times \left\{ \exp(-X_k^2) + \sqrt{\pi} X_k [1 + \operatorname{erf}(X_k)] \right\}, \end{aligned} \quad (434)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$X_k = X_{kk}^{(s)}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{1-s}} |\alpha_0| \cos(\theta - \theta_0 - \phi_k), \quad \bar{X}_k = X_{kk}^{(s)}(\theta_0 + \phi_k). \quad (435)$$

Część opisująca człony interferencyjne jest równa

$$\begin{aligned} P_{int}^{(s)}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq l}^{N-1} c_k c_l^* \sum_{m, n} b_m b_n G^{(s)}(m, n) \\ &\quad \times \exp[i m (\phi_k + \theta_0 - \theta) - i n (\phi_l + \theta_0 - \theta)]. \end{aligned} \quad (436)$$

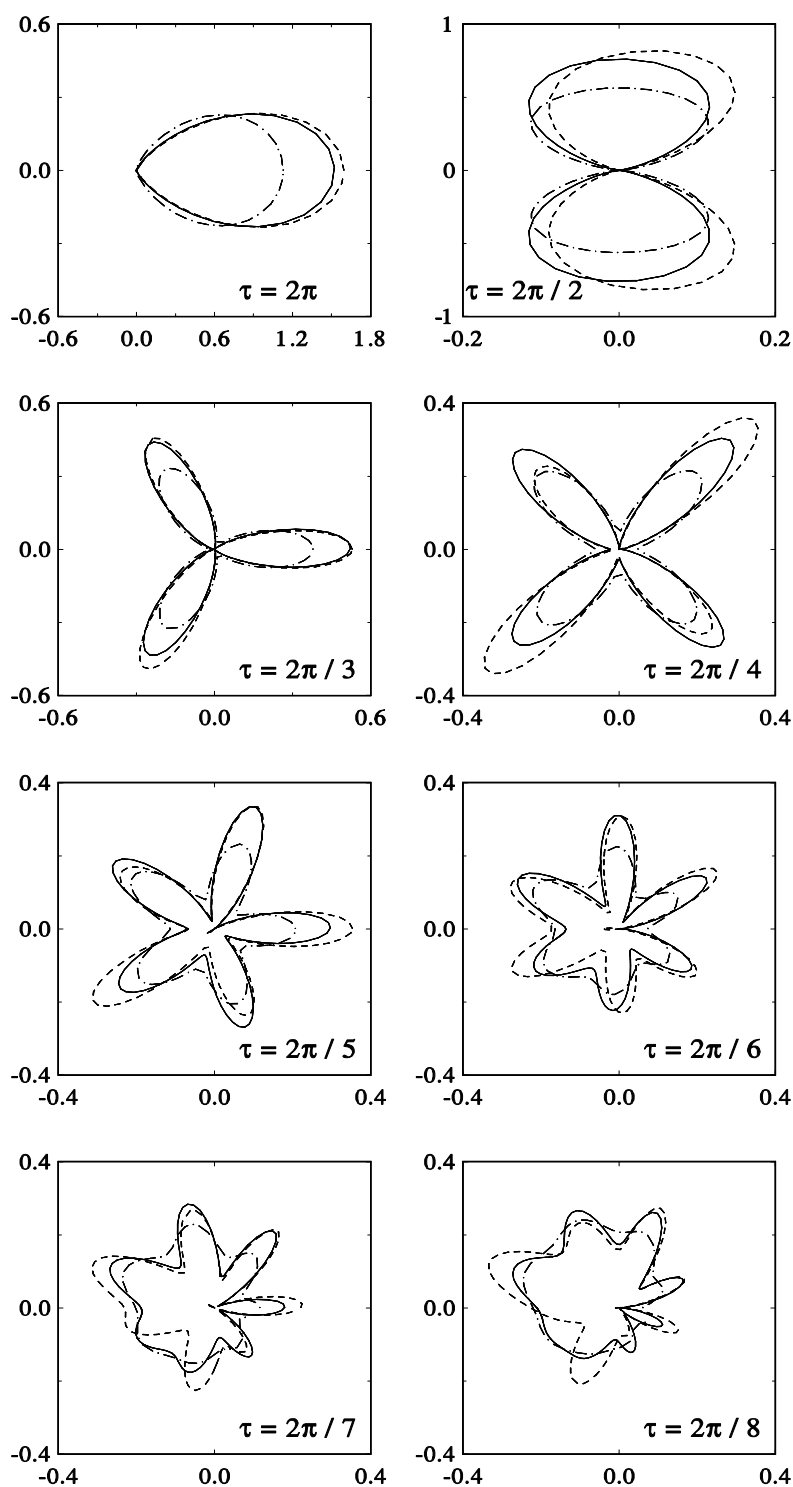
Człony w (429) można zsumować, co prowadzi nas do wyrażenia

$$\begin{aligned} P_{int}^{(s)}(\theta, M/N T) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq l} c_k c_l^* \exp[-(\bar{X}_{kl}^2 \kappa_{kl} - X_{kl}^2)] \\ &\quad \times \left\{ \exp(-X_{kl}^2) + \sqrt{\pi} X_{kl} [1 + \operatorname{erf}(X_{kl})] \right\}, \end{aligned} \quad (437)$$

gdzie

$$\begin{aligned} X_{kl} = X_{kl}^{(s)}(\theta) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1-s}} |\alpha_0| \left\{ \exp[i(\phi_k + \theta_0 - \theta)] \right. \\ &\quad \left. + \exp[-i(\phi_l + \theta_0 - \theta)] \right\}, \end{aligned} \quad (438)$$

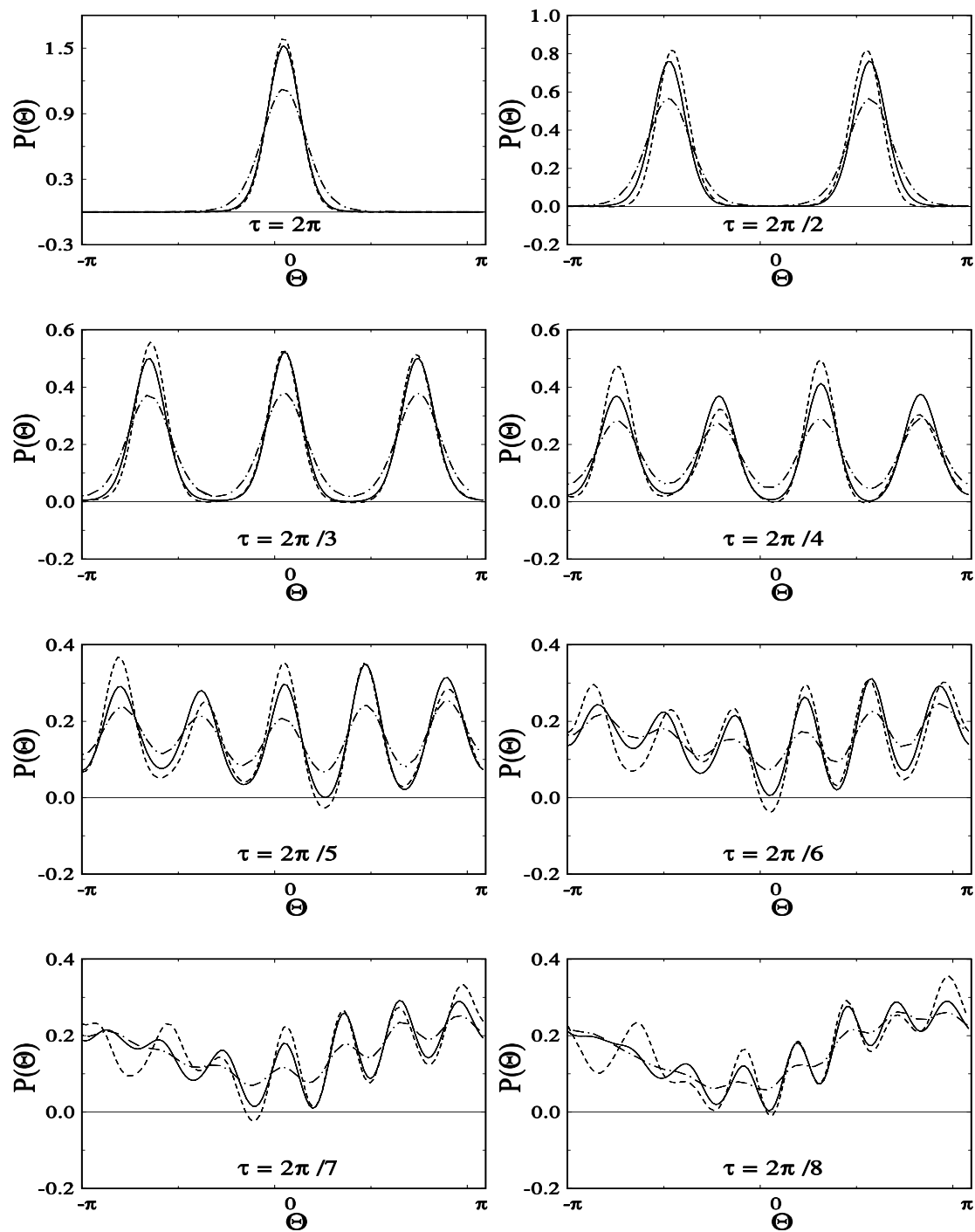
$$\kappa_{kl} = \frac{1-s}{2} + \frac{1+s}{2} \exp\{i(\phi_k - \phi_l)\} \quad (439)$$



Rys. 39:

Wykresy biegunowe rozkładu fazowego Pegga-Barnetta  $P_{PB}(\theta)$  (linia ciągła) w porównaniu do sparametryzowanych rozkładów fazowych:  $P^{(0)}(\theta)$  (linia przerywana) i  $P^{(-1)}(\theta)$  (linia punktowo-przerywana) dla dyskretnej superpozycji  $N$  ( $N=1-8$ ) stanów. 176





Rys. 40:

Tak jak na rys. 39, ale w układzie kartezjańskim.

Po raz kolejny zwracamy uwagę na podobieństwo wyrażeń (449) i (450) dla  $P(\theta)$  oraz wzorów (433) i (436) opisujących  $P^{(s)}(\theta)$ .  $s$ -Sparametryzowane rozkłady fazowe dla  $s = 0, -1$  rozkład Pegga-Barnetta przedstawiliśmy dla dyskretnej superpozycji  $N=1-8$  stanów koherentnych na rys. 39 i 40. Przyjeliśmy taką samą liczbę fotonów (równą 4) pola początkowego, jak na rys. 3, 4 i 38. W celu wyeksponowania podobieństw, superpozycje stanów przedstawiliśmy w dwu układach: biegunowym na rys. 39 i kartezjańskim na rys. 40. Widać, że dla dobrze rozdzielonych wierzchołków, maksima trzech rozkładów  $P(\theta)$  (linia ciągła),  $P^{(0)}(\theta)$  (linia przerywana) oraz  $P^{(-1)}(\theta)$  (linia punktowo-przerywana) pokrywają się odzwierciedlając strukturę stanów superpozycji. Największe maksima (biorąc pod uwagę  $P^{(0)}(\theta)$ ,  $P(\theta)$  i  $P^{(-1)}(\theta)$ ) występują dla marginalnej funkcji Wignera  $P^{(0)}(\theta)$ , podczas gdy najmniejsze - dla marginalnej funkcji  $Q$ . W miarę wzrostu  $N$  zanikają maksima wszystkich rozkładów, ale najszybciej dla  $P^{(-1)}(\theta)$ . Z wykresów wynika, że dla  $N=7, 8$  (przy  $|\alpha_0| = 2$ ) marginalna funkcja  $Q$  ma bardzo słabo widoczne maksima (lub wręcz ich nie ma), w przeciwieństwie do pozostałych rozkładów. Na wykresach uwidacznia się jeszcze jedna różnica. O czym wspominaliśmy, rozkłady  $P(\theta)$  i  $P^{(-1)}(\theta)$  (tak jak  $Q(\alpha)$ ) są zawsze dodatnio określone. Natomiast funkcja Wignera jak i jej rozkład marginalny, mogą przyjmować wartości ujemne. Jest to szczególnie widoczne na rys. 40 w układzie kartezjańskim dla  $N=5,6,7$ . Zatem wykresy biegunowe dla  $P^{(0)}(\theta)$  nie są jednoznaczne dla pewnych wartości  $\theta$ . Niemniej nie zrezygnowaliśmy z rys. 39 z uwagi na względnie niewielkie wartości ujemne rozkładów  $P^{(0)}(\theta)$  oraz dużą czytelność i pogładowość takich wykresów biegunowych. Dla dobrze rozdzielonych wierzchołków maksima  $P^{(0)}(\theta)$ ,  $P(\theta)$  i  $P^{(-1)}(\theta)$  pokrywają się. Jednak w miarę wzrostu  $N$  pojawiają się nieznaczne różnice położenia maksimów tych rozkładów. Wynika to z dominującej roli członów interferencyjnych.

Podkreślamy, że mimo tych różnic istnieje duże podobieństwo między  $s$ -sparametryzowanymi rozkładami fazowymi (zatem i  $s$ -sparametryzowanymi rozkładami *quasi*-prawdopodobieństwa) a rozkładem fazowym Pegga-Barnetta w opisie dyskretnej superpozycji stanów rozróżnialnych makroskopowo dla modelu oscylatora anharmonicznego.

## 7.4 Rozkłady fazowe i *quasi*-prawdopodobieństwa w opisie dyfuzji fazy

Opiszemy ewolucję fazy pola w modelach tłumionego i wzmacnianego oscylatora anharmonicznego stosując metodę zaproponowaną przez Barnetta i in. [342]. Często optyczny szum kwantowy rozkłada się na dwie części: szum amplitudowy i fazowy. Fluktuacje związane z tłumieniem i wzmacnianiem oscylacji anharmonicznych powodują m.in. dyfuzję fazy. Porównanie współczynników dyfuzji w równaniu Fokkera-Plancka dla *s*-sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa z tym współczynnikiem w równaniu ewolucji rozkładu fazowego Pegga-Barnetta pozwala na stwierdzenie, że funkcja Wignera prawidłowo opisuje dyfuzję fazy. Do tego wniosku dojdziemy bez potrzeby znalezienia jawnej postaci rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$ ,  $P^{(s)}(\theta)$  i  $P(\theta)$ .

Zjawisko tłumienia i wzmacniania opiszemy w standardowy sposób, tak jak to uczyniliśmy w modelu rozpraszania ramanowskiego poprzez sprzężenie układu (oscylatora anharmonicznego) z nieskończonym zbiorem oscylatorów znajdujących się w równowadze termodynamicznej (termostatem). Hamiltoniany mają postać [343, 181, 179]:

$$H = H_0 + H_{I1} + H_{I2} \quad (440a)$$

$$H_0 = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar \sum_j \omega_{Vj}\hat{a}_{Vj}^+\hat{a}_{Vj} \quad (440b)$$

$$H_{I1} = \hbar\kappa\hat{a}^{+2}\hat{a}^2 \quad (440c)$$

$$H_{I2} = \hbar(\hat{a}\hat{\Gamma}^+ + \text{h.c.}), \quad (440d)$$

gdzie operatory termostatu są następujące: (i) dla tłumionego oscylatora anharmonicznego

$$\hat{\Gamma} = \sum_j \kappa_{Vj}\hat{a}_{Vj} \quad (441)$$

oraz (ii) dla oscylatora wzmacnianego

$$\hat{\Gamma} = \sum_j \kappa_{Vj}\hat{a}_{Vj}^+. \quad (442)$$

Stałe sprzężenia z  $j$ -tym oscylatorem termostatu oznaczono przez  $\kappa_{Vj}$ . W tym paragrafie omówimy jedynie model oscylatora wzmacnianego, natomiast analizę oscylatora tłumionego przedstawimy w uzupełnieniu **H**.

Równanie podstawowe dla zredukowanej macierzy gęstości  $\hat{\rho}$  w obrazie oddziaływania ma postać [179]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i\kappa(\hat{a}^{+2}\hat{a}^2\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{+2}\hat{a}^2) + \frac{1}{2}\gamma(2\hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^+) \\ & + \gamma\langle\hat{n}_V\rangle(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a}), \end{aligned} \quad (443)$$

gdzie  $\langle\hat{n}_V\rangle$  oznacza średnią liczbą oscylatorów w jednym modzie termostatu określoną rozkładem Bosego-Einsteina (74). Stosując reguły odpowiedniości (75a-b) otrzymujemy równanie Fokkera-Plancka dla  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}^{(s)}(\alpha) = & \left\{ -i\kappa \left[ 2(1-s)\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha - 2\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha|\alpha|^2 + s\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\alpha^2 \right. \right. \\ & + \left. \frac{1-s^2}{2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\alpha^*}\alpha - \text{c.c.} \right] - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^* \right) \\ & \left. + \gamma \left( \langle\hat{n}_V\rangle + \frac{1+s}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*} \right\} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha). \end{aligned} \quad (444)$$

Nasze równanie (444) jest uogólnieniem na dowolnie sparametryzowany rozkład  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  równania Daniela i Milburna [179] dla funkcji  $Q$  ( $s = -1$ ). Wspomniani autorzy znaleźli rozwiązanie FPE dla funkcji  $Q$ . Jednak przedstawimy porównanie różnych rozkładów w taki sposób, że znajomość pełnego rozwiązania (444) dla  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  nie jest potrzebna. W tym celu zapiszemy równanie (444) w zmiennych biegunowych  $r = |\alpha|$  i  $\theta = \text{Arg}(\alpha)$ . Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}^{(s)}(r, \theta) = & \left\{ 2\kappa \left( r^2 - 1 - \frac{s}{2} \right) \frac{\partial}{\partial\theta} - \kappa \left( s + \frac{1-s^2}{8r^2} r \frac{\partial}{\partial r} \right) r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\theta} \right. \\ & - \frac{\gamma}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 + \frac{\gamma}{4r^2} \left( \langle\hat{n}_V\rangle + \frac{1+s}{2} \right) \left( r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right) \\ & \left. - \frac{\kappa}{8} \frac{1-s^2}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial\theta^3} \right\} \mathcal{W}^{(s)}(r, \theta) \end{aligned} \quad (445)$$

Z drugiej strony, w analogii do rozważań z §3.2, równanie podstawowe (443) zapiszemy

w reprezentacji fokowskiej dla  $\rho_{mn} \equiv \langle m|\hat{\rho}|n\rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_{mn} &= -i\kappa [m(m-1) - n(n-1)]\rho_{mn} \\ &+ \frac{\gamma}{2} [2\sqrt{mn}\rho_{m-1,n-1}] - (m+n+2)\rho_{mn} + \gamma\langle\hat{n}_V\rangle \\ &\times \left[ \sqrt{mn}\rho_{m-1,n-1} + \sqrt{(m+1)(n+1)}\rho_{m+1,n+1} - (m+n+1)\rho_{mn} \right]. \end{aligned} \quad (446)$$

Po wysumowaniu obu stron równania (446) po  $m$  i  $n$  z odpowiednim czynnikiem fazowym, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P(\theta) &= -i\kappa \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \rho_{mn} \exp[-i(m-n)\theta](m-n)(m+n-1) \\ &- \frac{\gamma}{2} \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \rho_{mn} \exp[-i(m-n)\theta](\sqrt{m+1} - \sqrt{n+1})^2 \\ &- \frac{\gamma}{2}\langle\hat{n}_V\rangle \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \rho_{mn} \exp[-i(m-n)\theta] \\ &\times \left[ (\sqrt{m+1} - \sqrt{n+1})^2 + (\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 \right]. \end{aligned} \quad (447)$$

Powstaje problem, jak powiązać równania (445) i (447). Nie jest to łatwy problem, gdyż fluktuacje amplitudy i fazy związane ze wzmacnianiem oscylatora anharmonicznego nie faktoryzują się. Jednak przy założeniach:

$$\langle\hat{n}\rangle \gg 1, \quad (448a)$$

$$\langle\hat{n}\rangle \gg \sqrt{\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle}, \quad (448b)$$

równanie (447) upraszcza się do postaci

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\theta) = \left\{ 2\kappa\langle\hat{n}\rangle \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\gamma}{8} \frac{2\langle\hat{n}_V\rangle + 1}{\langle\hat{n}\rangle} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right\} P(\theta). \quad (449)$$

Jak widać współczynnik dyfuzji w (449) jest równy

$$D_\theta^{(\text{PB})} = \frac{\gamma}{8\langle\hat{n}\rangle} (2\langle\hat{n}_V\rangle + 1), \quad (450)$$

podczas gdy współczynnik dyfuzji  $D_\theta^{(s)}$  (związany z dyfuzją fazy) w równaniu Fokkera-Plancka (445) ma postać

$$D_\theta^{(s)} = \frac{\gamma}{8\langle\hat{n}\rangle} (2\langle\hat{n}_V\rangle + 1 + s), \quad (451)$$

jeśli przyjąć, że  $r^{-2} \approx \langle \hat{n} \rangle^{-1}$ , co w istocie odpowiada założeniu (448b). Widać, że funkcja Wignera ( $s = 0$ ) prawidłowo opisuje dyfuzję fazy.

Do tego wniosku można dojść bardziej formalnie pomijając fluktuacje amplitudy:

$$\mathcal{W}^{(s)}(r, \theta) = \frac{2\pi}{r} P^{(s)}(\theta) \delta\left(r - \sqrt{\langle \hat{n} \rangle}\right). \quad (452)$$

Wówczas równanie Fokkera-Plancka (H.3) dla  $\mathcal{W}^{(s)}(r, \theta)$  redukuje się do równania dla sparametryzowanego rozkładu fazowego  $P^{(s)}(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P^{(s)}(\theta) &= \left\{ \kappa(2\langle \hat{n} \rangle - 2 - s) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma}{4\langle \hat{n} \rangle} \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1+s}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa}{8} \frac{1-s^2}{\langle \hat{n} \rangle} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\} P^{(s)}(\theta) \\ &\approx \left\{ 2\kappa\langle \hat{n} \rangle \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma}{8} \frac{2\langle \hat{n}_V \rangle + 1 + s}{\langle \hat{n} \rangle} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\kappa}{8} \frac{1-s^2}{\langle \hat{n} \rangle} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\} P^{(s)}(\theta). \end{aligned} \quad (453)$$

Drugie z równań dla marginalnej funkcji Wignera  $P^{(0)}(\theta)$  ma takie same współczynniki dryftu i dyfuzji, jak równanie (449). Te równania różnią się jedynie występowaniem członu z trzecią pochodną po  $\theta$ . Podobny wynik otrzymaliśmy w uzupełnieniu **H** dla modelu tłumionego oscylatora anharmonicznego.

Metodę Barnetta i in. [342] zastosowali także Lakshmi i Swain [288] oraz Lu [344] w innych modelach. Także z tych badań wynika, że funkcja Wignera dobrze opisuje własności fazowe przy założeniu intensywnego pola o zanedbywalnie małych fluktuacjach amplitudy.

## PODSUMOWANIE

1. Wyprowadzono analitycznie zwarte wyrażenia na  $s$ -sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$ , m. in. dla idealnych stanów ściśnionych (29), przesuniętych stanów fokowskich (32) i stanów koherentnych Titulaera-Glaubera (45).
2. Opisano ewolucję pola o dużej liczbie fotonów w nieliniowym ośrodku kerrowskim w ramach modelu oscylatora anharmonicznego. Metodą punktu siodłowego wyznaczono przybliżony wzór na funkcję  $Q$  (61). Na wykresach przedstawiono przekroje funkcji  $Q$  w tej samej skali dla małej i dla dużej liczby fotonów. W ostatnim przypadku otrzymano regularne eliptyczne przekroje.
3. Rozpraszanie ramanowskie na dużym zbiorze fononów należących do różnych modów opisano w ramach kwantowo-statystycznego modelu fal stojących. Rozpraszanie analizowano w opisie całkowicie kwantowym, tj. uwzględniając kwantową ewolucję pól rozproszonych (stokesowskiego i antystokesowskiego) oraz pompującego pola laserowego. Wyprowadzono równanie fundamentalne (69) opisujące m. in. osłabienie pola pompującego oraz stochastyczne sprzężenie pól stokesowskiego i antystokesowskiego. Wyprowadzono równanie Fokkera-Plancka (77) dla  $s$ -sparametryzowanego rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A)$  oraz równanie ruchu (79) dla  $s$ -sparametryzowanej funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A)$ . Znalezione przybliżone rozwiązania dla  $\mathcal{C}^{(-1)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A)$  (B.2) i dla  $\mathcal{W}^{(-1)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A)$  (B.3).
4. Badano rozpraszanie ramanowskie w przybliżeniu parametrycznym. Podano równanie Fokkera-Plancka (80) dla  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A)$  oraz równanie (81) dla  $\mathcal{C}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A)$ . Znalezione dokładne analityczne rozwiązania określające ewolucję rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A)$  (89) i funkcji charakterystycznych  $\mathcal{C}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A)$  (83). Przedstawiono zagadnienie istnienia  $s$ -sparametryzowanych rozkładów  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A)$  dla początkowych pól rozproszonych koherentnych i/lub chaotycznych. W szczególności omówiono istnienie rozkładu  $P$  Glaubera-Sudarshana.

5. Przedstawiono opis rozpraszania ramanowskiego z uwzględnieniem kwantowej ewolucji pola pompującego (tj. bez stosowania przybliżenia parametrycznego), ale z pominięciem pola antystokesowskiego. Podano równanie fundamentalne w reprezentacji fokowskiej (110) i znaleziono jego pełne (tj. dla wszystkich elementów macierzy gęstości) analityczne rozwiązania (114)–(115) oraz (118), spełniające dowolne warunki początkowe. Podano związek tych rozwiązań z  $s$ -sparametryzowanym rozkładem  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_L, \alpha_S)$ . Podobną analizę przeprowadzono dla pól laserowego i antystokesowskiego, ale z pominięciem pola stokesowskiego. Rozwiązanie dla dowolnych pól początkowych jest dane wzorami (D.5)–(D.6) i/lub (D.8). Znaleziono przybliżone rozwiązanie (128), znacznie upraszczające rozwiązanie ściśle (118).
  
6. Omówiono powstawanie dyskretnej superpozycji stanów rozróżnialnych makroskopowo (kotów i kociąt schrödingerskich) podczas propagacji światła w ośrodku kerrowskim stosując model oscylatora anharmonicznego. Pokazano, że przy odpowiednim wyborze długości ośrodka (czasu) powstają superpozycje zarówno parzystej jak i nieparzystej liczby stanów koherentnych. Podano także ogólne reguły opisujące proces generacji dyskretnej superpozycji stanów koherentnych. Przedstawiono rozwiązanie (149) układu równań Białyńskiej-Biruli (142) na współczynniki superpozycji w postaci prostych, analitycznie zwartych wyrażeń (174)–(175). Określono symetrie współczynników superpozycji. Podano explicite wzory (183)–(188) na superpozycje stanów o kilku składnikach. Pokazano różnice i podobieństwa w opisie superpozycji stanów generowanych w wersji kwadratowej modelu i wersji normalnie uporządkowanej. Oszacowano maksymalną liczbę (189) dobrze rozdzielonych składników superpozycji w zależności od początkowej liczby fotonów. Znaleziono  $s$ -sparametryzowane rozkłady  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  (177) reprezentujące superpozycje stanów. Funkcja  $Q$ , przedstawiona na rysunkach, wykazuje regularną strukturę dla superpozycji dobrze rozdzielonych stanów.
  
7. Analizowano zjawisko ścięśniania oraz jego graficzne reprezentacje w modelu oscy-



latora anharmonicznego. Otrzymano wyrażenia opisujące ścieśnianie i ścieśnianie w osiach głównych. Przybliżone analityczne wzory na wariancje (224) oraz wariancje ekstremalne (226) otrzymano metodą punktu siodłowego przy założeniu dużej liczby fotonów i małej nieliniowości ośrodka. Porównano ścieśnianie światła o dużej i małej intensywności. W pierwszym z wymienionych przypadków pokazano możliwości uzyskania prawie doskonałego ścieśnienia światła w modelu. Wykreślono m.in. lemniskaty wariancji w celu zobrazowania przewidzianego efektu ścieśnienia światła.

8. Analizowano statystykę liczby fotonów pól ramanowskich i pola pompującego. Wyznaczono  $s$ -sparametryzowaną funkcję tworzącą (231) w prosty sposób określającą statystykę fotonów. Podano warunki określające ścieśnianie i ścieśnianie w osiach głównych poprzez odpowiednie funkcje w rozwiązaniach na  $s$ -sparametryzowane rozkłady  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha_S, \alpha_A)$ . Przedstawiono analityczne i graficzne porównanie różnych formalizmów korzystając z rozwiązań podanych w §§3.2.1, 3.1.2 i 3.2.2 oraz rozwiązań krótkoczasowych wyprowadzonych w uzupełnieniu **E**.
9. Podano ogólne związki między rozkładem fazowym, otrzymanym w ramach formalizmu hermitowskiego operatora fazy Pegga-Barnetta, a funkcją  $Q$  (299) i uogólnioną reprezentacją  $P$  (301).
10. Skonstruowano skończenie-wymiarowe stany koherentne (331) w przestrzeni stanów  $\Psi$ , które są analogiem glauberowskich stanów koherentnych w zwykłej przestrzeni Hilberta. Wyprowadzono różne wzory rekurencyjne (317)–(323) i znaleziono ich ogólne rozwiązanie (328) i (336) dla przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów. Podano jawną postać kilku stanów (F.23)–(F.28). Znaleziono dyskretny rozkład fazowy Pegga-Barnetta oraz rozkład liczby fotonów. Wyniki zilustrowano graficznie.
11. Pokazano *explicite*, że fazowe formalizmy Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga nie są równoważne. W szczególności, porównano rozkłady fazowe i wariancje fazy wyznaczone w formalizmach Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga dla kilku kon-

kretnych stanów pola: stanów fokowskich, glauberowskich stanów koherentnych oraz idealnych stanów ścięśnionych. Pokazano, że w ramach tych formalizmów uzyskuje się jakościowo różne rozkłady fazowe. Rozkład Garrisona-Wonga wykazuje anizotropię w przeciwieństwie do symetrii rozkładu fazowego Pegga-Barnetta oraz marginalnych funkcji Wignera i funkcji  $Q$ . Uproszczono metodę wyznaczania rozkładu fazowego Garrisona-Wonga, m. in. znaleziono rozwiązania wzorów iteracyjnych.

12. Rozkład fazowy Pegga-Barnetta porównano z  $s$ -sparametryzowanymi rozkładami *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  scałkowanymi po zmiennej radialnej. Podano analitycznie zwarte dokładne wzory na  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe dla stanów koherentnych (404), idealnych stanów ścięśnionych (408) oraz przesuniętych stanów fokowskich (416). Podano ogólną relację (391) na  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe w postaci podobnej do wyrażenia określającego rozkład Pegga-Barnetta. Pokazano, że ta relacja jest słuszna także w przypadku granicznym – dla marginalnej funkcji  $P$ . Pokazano, że w ogólnym przypadku, żaden z  $s$ -sparametryzowanych rozkładów fazowych nie jest dokładnie równy rozkładowi Pegga-Barnetta. Numeryczne wyniki ilustrujące podobieństwa i różnice przedstawiono na rysunkach.
13. Analizowano dyfuzję fazy w modelach tłumionego i wzmacnianego oscylatora anharmonicznego. Pokazano, że spośród  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa, funkcja Wignera najlepiej opisuje własności fazowe światła.
14. Rozkład fazowy Pegga-Barnetta oraz  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe wykorzystano do opisu kwantowych superpozycji stanów rozróżnialnych makroskopowo. Pokazano, że dla superpozycji dobrze rozdzielonych stanów omawiane rozkłady fazowe, jak i  $s$ -sparametryzowane rozkłady *quasi*-prawdopodobieństwa, wykazują tę samą symetrię rotacyjną. Funkcje fazowe przedstawiono graficznie w celu wyeksponowania ich symetrii oraz wpływu członów interferencyjnych.

Wyprowadzono wzory analityczne ukazujące podobieństwa pomiędzy rozkładem Pegga-Barnetta (426)– (429) a  $s$ -sparametryzowanymi rozkładami fazowymi (432)– (437) dla superpozycji stanów.

Następujące wyniki przedstawione w dysertacji są naszym zdaniem najistotniejsze:

- Analiza dyskretnych superpozycji stanów rozróżnialnych makroskopowo powstających podczas oddziaływania światła z ośrodkiem w ramach modelu oscylatora anharmonicznego. W szczególności ukazanie możliwości otrzymania stanu superpozycji o nieparzystej liczbie składników oraz wyprowadzenie prostych, a zarazem dokładnych wzorów analitycznych (174)– (175) określających superpozycje. Jest to rozwiązanie problemu Sandersa [192]. Niektóre wyniki zostały opublikowane w [54]<sup>56</sup> i [60]<sup>57</sup>.
- Wyprowadzenie ogólnych wzorów (391)– (394) określających  $s$ -sparametryzowane rozkłady fazowe. Wzór (392) przedstawiono w [49]<sup>58</sup>.
- Porównanie fazowych formalizmów Pegga-Barnetta i Garrisona-Wonga [133]<sup>59</sup>.
- Wyprowadzenie, metodą punktu siodłowego, przybliżonych wzorów analitycznych na funkcję  $Q$  (61) i wariacje ekstremalne (226) w opisie ewolucji pola o dużej liczbie fotonów w ośrodku, który jest modelowany jako oscylator anharmoniczny [25]<sup>60</sup>.
- Jawna postać stanów koherentnych (331) i (336) w skończenie-wymiarowej przestrzeni stanów  $\Psi$  [277]<sup>61</sup>. Jest to analityczne rozwiązanie problemu Knighta i współpracowników [40].

---

<sup>56</sup>o ile nam wiadomo, ten artykuł był dotychczas dwadzieścia dwa razy cytowany w literaturze światowej

<sup>57</sup>artykuł dziewięć razy cytowany

<sup>58</sup>artykuł dwa razy cytowany

<sup>59</sup>artykuł siedem razy cytowany

<sup>60</sup>artykuł trzy razy cytowany

<sup>61</sup>niektóre wyniki przedstawiono na konferencji „Quantum Optics III”, która się odbyła w Szczyrku w wrześniu 1993

- Analityczne rozwiązania (114)– (115) i/lub (118) równania fundamentalnego (110) dla wszystkich elementów macierzy gęstości i dla dowolnych pól początkowych opisujące rozpraszanie ramanowskie z uwzględnieniem kwantowej ewolucji pola pompującego. Jest to istotne i nietrywialne uogólnienie rozwiązań McNeila i Wallsa [88] oraz Simaana [89]<sup>62</sup>. Nasze wzory, w przeciwieństwie do rozwiązań innych autorów, w pełni spełniają kryterium Peřiny [24]. Wynik został opublikowany w [64].
- Opis rozpraszania ramanowskiego w przybliżeniu parametrycznym za pomocą  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa (89) [64].

---

<sup>62</sup>Te rozwiązanie są ograniczone do elementów diagonalnych macierzy gęstości w reprezentacji fokowskiej, zatem nie opisują własności fazowych światła (w szczególności ścięśniania). Mimo to, analiza Simaana [89] jest do dziś uznawana za najpełniejsze zastosowanie równania fundamentalnego do opisu rozpraszania ramanowskiego [73, 110].

## Uzupełnienie A.

### Wyprowadzenie równania fundamentalnego ( 69)

Hamiltoniany oddziaływania  $H_S$  ( 66a) i  $H_A$  ( 66b) można zapisać następująco:

$$\hat{H}_S + \hat{H}_A = \hbar \sum_{k=1}^4 \hat{F}_k \hat{Q}_k, \quad (\text{A.1})$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 &= \hat{F}_2^+ = \sum_j \lambda_{Sj} \hat{a}_{Vj}^+ \exp[i\omega_{Vj}(t - t_0)], \\ \hat{F}_3 &= \hat{F}_4^+ = \sum_j \lambda_{Aj}^* \hat{a}_{Vj} \exp[-i\omega_{Vj}(t - t_0)], \\ \hat{Q}_1 &= \hat{Q}_2^+ = \hat{a}_L \hat{a}_S^+ \exp[-i\Omega_S(t - t_0)], \\ \hat{Q}_3 &= \hat{Q}_4^+ = \hat{a}_L \hat{a}_A^+ \exp[i\Omega_A(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Częstotliwości  $\Omega_S$  i  $\Omega_A$  wyrażają się wzorem ( 73). Operatory  $\hat{Q}_i$  ( $\hat{F}_i$ ) są wyłącznie funkcjami operatorów układu (termostatu). Załóżmy, że fonony optyczne są gęsto upakowane z liczbą modów  $g(\omega_j)d\omega_j$  w przedziale  $(\omega_j, \omega_j + d\omega_j)$ . Zatem sumowanie po modach wibracyjnych można zastąpić całkowaniem

$$\sum_j (...) \approx \int_0^\infty d\omega_j g(\omega_j) (...). \quad (\text{A.3})$$

Przyjmijmy, że dla fononów optycznych stałe sprzężenia  $\lambda_{S,A}(\omega_j)$  i funkcja gęstości  $g(\omega_j)$  są płaskie w pobliżu  $\Omega$ ,

$$g(\Omega \pm \Delta\Omega) \approx g(\Omega), \quad (\text{A.4a})$$

$$\lambda_k(\Omega \pm \Delta\Omega) \approx \lambda_k(\Omega), \quad k = S, A. \quad (\text{A.4b})$$

W celu wyprowadzenia równania fundamentalnego należy wpierw wyznaczyć spektralne gęstości termostatu

$$w_{ij}^+ = \int_0^\infty e^{i\omega_i\tau} \langle \hat{F}_i(\tau) \hat{F}_j \rangle_R d\tau, \quad (\text{A.5a})$$

$$w_{ji}^- = \int_0^\infty e^{i\omega_i\tau} \left\langle \hat{F}_j \hat{F}_i(\tau) \right\rangle_R d\tau, \quad (\text{A.5b})$$

gdzie  $\langle \dots \rangle_R$  oznacza uśrednianie po wszystkich operatorach termostatu oraz podstawiamy  $\omega_i = \pm\Omega_{S,A}$ . Po dokonaniu odpowiedniego przeliczenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} w_{21}^+ &= \left( \frac{\gamma_S}{2} + i\Delta\omega_S \right) (\langle \hat{n}_V \rangle + 1), \\ w_{12}^+ &= \left( \frac{\gamma_S}{2} - i\Delta\omega_S \right) \langle \hat{n}_V \rangle, \\ w_{43}^+ &= \left( \frac{\gamma_A}{2} - i\Delta\omega_A \right) \langle \hat{n}_V \rangle, \\ w_{34}^+ &= \left( \frac{\gamma_A}{2} + i\Delta\omega_A \right) (\langle \hat{n}_V \rangle + 1), \\ w_{31}^+ &= \left( \frac{\gamma_{AS}}{2} + i\Delta\omega_{AS} \right) (\langle \hat{n}_V \rangle + 1), \\ w_{13}^+ &= \left( \frac{\gamma_{SA}}{2} - i\Delta\omega_{SA} \right) \langle \hat{n}_V \rangle, \\ w_{42}^+ &= \left( \frac{\gamma_{AS}}{2} - i\Delta\omega_{AS} \right) \langle \hat{n}_V \rangle, \\ w_{24}^+ &= \left( \frac{\gamma_{SA}}{2} + i\Delta\omega_{SA} \right) (\langle \hat{n}_V \rangle + 1), \\ w_{ij}^- &= (w_{ij}^+)^*. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Wszystkie pozostałe gęstości spektralne, w szczególności  $\omega_{ii}^\pm$  (dla  $i = 1, \dots, 4$ ), znikają. Dla prostoty, średnią liczbę fononów o częstotliwości  $\Omega$  oznaczyliśmy przez  $\langle \hat{n}_V \rangle = \langle \hat{n}_V(\Omega) \rangle$ . Stałe  $\gamma_A$ ,  $\gamma_S$ ,  $\gamma_{AS}$  i  $\gamma_{SA}$  określają odpowiednio wzory (70a) i (70b). Zachodzi prosta relacja między tymi stałymi:  $|\gamma_{SA}|^2 = |\gamma_{AS}|^2 = \gamma_A\gamma_S$ . Przesunięcia częstotliwości  $\Delta\omega_i$  wyrażają się przez całki w sensie wartości głównej Cauchy'ego

$$\Delta\omega_k = -\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{g(\omega_j) |\lambda_k(\omega_j)|^2}{\omega_j - \Omega_k} d\omega_j \quad (k = S, A), \quad (\text{A.7a})$$

$$\Delta\omega_{SA} = (\Delta\omega_{AS})^* = -\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{g(\omega_j) \lambda_S(\omega_j) \lambda_A^*(\omega_j)}{\omega_j - \Omega} d\omega_j. \quad (\text{A.7b})$$

Przesunięcia  $\Delta\omega_i$  zmieniają tylko nieznacznie częstotliwość  $\Omega$ , zatem z reguły są pomijane [19]. Po wyliczeniu spektralnych gęstości termostatu wyprowadzenie równania fundamentalnego (69) nie stwarza żadnego problemu.

## Uzupełnienie B.

### Przybliżone rozwiązanie równania Fokkera-Plancka ( 77)

Podamy tutaj proste formalne rozwiązanie uogólnionego równania Fokkera-Plancka ( 77) dla funkcji  $Q = \mathcal{W}^{(-1)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A, t)$ , jak również rozwiązanie odpowiadającego równania ruchu dla funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(-1)}(\beta_L, \beta_S, \beta_A, t)$ . Wybieramy porządek antynormalny ( $s = -1$ ), aby zmniejszyć problemy związane z istnieniem rozwiązań, a także, aby zredukować FPE zawierające pochodne trzeciego rzędu (dla  $s = \pm 1$ ) do równania drugiego rzędu. O czym już wspominaliśmy, problem znalezienia ścisłego rozwiązania równań ( 77) i ( 79) jest bardzo skomplikowany, gdyż elementy wektora dryftu nie są liniowe oraz elementy macierzy dyfuzji nie są stałe. Najczęściej stosowaną metodą rozwiązywania takich równań jest założenie małych fluktuacji pól promieniowania w porównaniu do ich średnich wartości [71, 20, 24, 345, 342]. Ten warunek można spełnić dobierając odpowiednio stan podstawowy pól pompującego i rozproszonych. Przy tym bardzo mocnym założeniu, równania Fokkera-Plancka ( 77), odpowiadające porządkowi antynormalnemu, można zapisać w zlinearyzowanej postaci:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}^{(-1)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A, t) = & \frac{1}{2} \gamma_S \left\{ \left[ - (D_{LS} + \xi_L \xi_S) \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \right. \right. \\
& + \langle \hat{n}_S \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L - (\langle \hat{n}_L \rangle - 1) \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \alpha_S + \text{c.c.} \left. \right] \\
& + 2 \langle \hat{n}_S \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \left. \right\} \mathcal{W}^{(-1)} \\
& + \frac{1}{2} \gamma_A \left\{ \left[ - (D_{LA} + \xi_L \xi_A) \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right. \right. \\
& - (\langle \hat{n}_A \rangle - 1) \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L + \langle \hat{n}_L \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \alpha_A + \text{c.c.} \left. \right] \\
& + 2 \langle \hat{n}_L \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \frac{\partial}{\partial \alpha_A^*} \left. \right\} \mathcal{W}^{(-1)} \tag{B.1} \\
& - \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{SA} e^{-2i\Delta\Omega\Delta t} \left[ (C_L + \xi_L^2) \left( \alpha_A^* \frac{\partial}{\partial \alpha_S} + \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} - \alpha_S^* \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right) \right. \right. \\
& - 2(\bar{D}_{SL} - \xi_L \xi_S^*) \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} - (D_{SA}^* + \xi_S^* \xi_A^*) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_L^{*2}} \left. \right] + \text{c.c.} \left. \right\} \mathcal{W}^{(-1)} \\
& + \gamma_S \langle \hat{n}_V \rangle \left\{ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L - (D_{LS} + \xi_L \xi_S) \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_S} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \alpha_S + \text{c.c.} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle \hat{n}_S \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} + \langle \hat{n}_L \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \frac{\partial}{\partial \alpha_S^*} \} \mathcal{W}^{(-1)} \\
& + \gamma_A \langle \hat{n}_V \rangle \left\{ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \alpha_L - (D_{LA} + \xi_L \xi_A) \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \alpha_A + \text{c.c.} \right) \right. \\
& + \langle \hat{n}_A \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_L} \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} + \langle \hat{n}_L \rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \frac{\partial}{\partial \alpha_A^*} \left. \right\} \mathcal{W}^{(-1)} \\
& - \left\{ \gamma_{AS} \langle \hat{n}_V \rangle e^{2i\Delta\Omega\Delta t} \left( (D_{SA}^* + \xi_S^* \xi_A^*) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_L^{*2}} + (C_L + \xi_L^2) \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right. \right. \\
& \left. \left. + (\bar{D}_{AL} - \xi_L \xi_A^*) \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_S} + (\bar{D}_{SL} - \xi_L \xi_S^*) \frac{\partial}{\partial \alpha_L^*} \frac{\partial}{\partial \alpha_A} \right) + \text{c.c.} \right\} \mathcal{W}^{(-1)},
\end{aligned}$$

gdzie współczynniki  $D_{kl}$ ,  $\bar{D}_{kl}$ ,  $C_k$ ,  $\xi_k$  dla  $k, l = L, S, A$  są zdefiniowane wzorami ( 82a-e) w chwili początkowej  $t_0$ . Zauważamy, że przy takich założeniach rozpraszanie ramanowskie można traktować jako proces Ornsteina–Uhlenbecka [109]. Równanie Fokkera-Plancka ( B.1) może być rozwiązane analitycznie różnymi metodami (zob. np. [20]). Przykładowo, FPE ( B.1), po zastosowaniu odwrotnej transformaty Fouriera ( 4), przechodzi w równanie ruchu pierwszego rzędu dla funkcji charakterystycznej  $\mathcal{C}^{(-1)}(\beta_L, \beta_S, \beta_A, t)$ . Metoda charakterystyk zastosowana do tego równania prowadzi do rozwiązania

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{(-1)}(\beta_L, \beta_S, \beta_A, t) = & \left\langle \exp \left\{ - \sum_{k=L,S,A} [B_k^{(-1)}(t) |\beta_k|^2 \right. \right. \\
& + \left( \frac{1}{2} C_k^*(t) \beta_k^2 + \text{c.c.} \right) + (\beta_k \xi_k^*(t) - \text{c.c.}) \left. \right] \\
& + [D_{LS}(t) \beta_L^* \beta_S^* + \bar{D}_{LS} \beta_L \beta_S^* \\
& + D_{LA}(t) \beta_L^* \beta_A^* + \bar{D}_{LA} \beta_L \beta_A^* \\
& \left. + D_{SA}(t) \beta_S^* \beta_A^* + \bar{D}_{SA} \beta_S \beta_A^* + \text{c.c.}] \right\} \left. \right\rangle,
\end{aligned} \tag{B.2}$$

gdzie duże nawiasy  $\langle \dots \rangle$  oznaczają uśrednianie po zespolonych amplitudach  $\xi_k$  ( $k = L, S, A$ ) z początkowym rozkładem  $\mathcal{W}^{(-1)}(\alpha_L, \alpha_S, \alpha_A, t_0)$ . To określa wpływ początkowych statystyk pól (pompującego i rozproszonych) na ewolucję układu. Rozwiązanie równania ( B.1) otrzymujemy z rozwiązania ( B.2) licząc transformatę Fouriera ( 3). Rozwiązanie ma formę sześciowymiarowego (nie licząc czasu) rozkładu gaussowskiego



zawierającego korelacje między polami promieniowania:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^{(-1)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) = & \left\langle \frac{1}{L^{(-1)}} \exp \left\{ - (L^{(-1)})^{-2} \sum_{j=1}^3 \right. \right. \\
& \left[ |\alpha_j - \xi_j(t)|^2 E_j^{(-1)} - \frac{1}{2} \left( (\alpha_j^* - \xi_j^*(t))^2 E_{j+3}^{(-1)} + \text{c.c.} \right) \right] \\
& + (L^{(-1)})^{-2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=j+1}^3 [(\alpha_j^* - \xi_j^*(t))(\alpha_k^* - \xi_k^*(t)) E_{j+k+4}^{(-1)} \\
& \left. \left. + (\alpha_j - \xi_j(t))(\alpha_k^* - \xi_k^*(t)) E_{j+k+7}^{(-1)} + \text{c.c.} \right] \right\}, \tag{B.3}
\end{aligned}$$

gdzie dla prostoty zmieniliśmy wskaźniki amplitud:  $\alpha_1 = \alpha_L$ ,  $\alpha_2 = \alpha_S$ ,  $\alpha_3 = \alpha_A$ ,  $\xi_1 = \xi_L$ ,  $\xi_2 = \xi_S$ ,  $\xi_3 = \xi_A$ . Niezależne od czasu współczynniki  $E_1^{(-1)}$ , ...,  $E_{12}^{(-1)}$  i  $L^{(-1)}$  są funkcjami wyrażen  $B_k^{(-1)}$ ,  $C_k$ ,  $D_{kl}$ ,  $\bar{D}_{kl}$  występujących w równaniu ( B.2). Z braku miejsca nie podajemy tych współczynników explicite, gdyż są o wiele bardziej skomplikowane niż odpowiednie współczynniki ( 90) i ( 91) dla rozkładu dwumodowego. Zamierzaliśmy jedynie podać przykład przybliżonej metody rozwiązywania równań ( 77) i ( 79). Zasadniczo, rozwiązania ( B.2) i ( B.3) są słuszne jedynie w przybliżeniu parametrycznym i przybliżeniu krótkich czasów (STA).

## Uzupełnienie C.

### Ścisłe rozwiązanie równania fundamentalnego ( 110) w reprezentacji fokowskiej

Następujące przekształcenie elementów macierzy gęstości  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau)$ :

$$\psi_{nm}(\nu\mu\tau) = \left[ \frac{n!(n+\nu)!}{m!(m+\mu)!} \right]^{1/2} \rho_{nm}(\nu\mu\tau), \tag{C.1}$$

eliminuje pierwiastek kwadratowy występujący w równaniu ( 110) dla elementów niediagonalnych. W przekształceniu ( C.1) przyjęliśmy, że stopień niediagonalności  $\mu$  jest liczbą naturalną (uwzględniając 0), podczas gdy  $\nu \geq -n$ . Po podstawieniu ( C.1) do ( 110) równanie ruchu dla nowych elementów macierzowych  $\psi_{nm}(\nu\mu\tau)$  przyjmuje

postać:

$$\begin{aligned}\psi_{nm}(\nu\mu\tau) &= -\frac{1}{2}[n(m+1) + (n+\nu)(m+\mu+1)]\psi_{nm}(\nu\mu\tau) \\ &+ \psi_{n+1,m-1}(\nu\mu\tau).\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

Metoda transformat Laplace'a, zastosowana do równania ( C.2), w prosty sposób prowadzi nas do rozwiązania

$$\bar{\psi}_{nm}(\nu\mu s) = \sum_{l=0}^m \psi_{n+l,m-l}(\nu\mu\tau_0) \prod_{p=0}^l [s + f(p)]^{-1} \quad (\text{C.3})$$

dla transformaty Laplace'a  $\bar{\psi}_{nm}(\nu\mu\tau)$  elementów  $\psi_{nm}(\nu\mu\tau)$ . W rozwiązaniu ( C.3) pojawia się funkcja  $f(p)$  dana przez ( 116). Jeśli nie ma równych czynników wśród elementów zbioru  $f(0), f(1), \dots, f(l)$  to odwrotna transformata jest rozwiązaniem ( 114). Oczywiście, należy powrócić do starej notacji na elementy  $\rho_{nm}(\nu\mu\tau)$  zgodnie z definicją ( C.1). Jeśli jednak mianownik we wzorze ( C.3) zawiera powtarzające się elementy to odwrotna transformata musi uwzględnić konwolucje. Wykorzystamy dwie ogólne, zasadniczo równoważne metody stosowane przez Simaana [89] i Malakjana [118]. W następujący sposób rozdzielimy równanie ( C.3) na dwie części:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{nm}(\nu\mu s) &= \sum_{l=0}^{\lambda} \psi_{n+l,m-l}(\nu\mu\tau_0) \prod_{p=0}^l [s + f(p)]^{-1} \\ &+ (1 - \delta_{m0}) \sum_{l=\lambda+1}^m \psi_{n+l,m-l}(\nu\mu\tau_0) \\ &\times \prod_{p=0}^{\lambda} [s + f(p)]^{-1} \prod_{p'=\lambda+1}^l [s + f(p')]^{-1},\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

gdzie  $\lambda$  zdefiniowaliśmy wzorem ( 113) (lub równoważnie relacją ( 117)). Zauważamy, że parabola  $f(q)=\text{const}$  przyjmuje wartości maksymalne dla  $q_0 = (2m - 2n + \mu - \nu + 2)/4$ . Wartość parametru  $q_0$ , lub lepiej  $\lambda$  (funkcja entier z  $q_0$ ), może być kryterium określającym sposób rozdzielenia członów w ( C.3) tak, aby można było skutecznie zastosować twierdzenie o splocie. Pierwszy człon w ( C.4) nie zawiera w mianowniku składników wzajemnie równych. Zatem odwrotna transformata Laplace'a tej części wzoru (C.4) przyjmuje formę ( 114), gdzie należy odpowiednio dobrać górną granicę

sumowania. Mianownik drugiego członu ( C.4) zawiera powtarzające się składniki, ale zapisane w postaci rozdzielonej. Zatem można bezpośrednio zastosować twierdzenie o splocie, które prowadzi nas do rozwiązania ( 115).

Równania ( 114) i ( 115) mają skomplikowaną strukturę. Zapiszemy te wzory w postaci zwartej. Jeśli założyć, że występuje tylko jedna para równych składników wśród elementów  $f(0), f(1), \dots, f(l)$ , id est

$$\exists_{\substack{q_1 \neq q'_1 \\ q_1, q'_1 \in \{0, \dots, l\}}} f(q_1) = f(q'_1) \quad \forall_{\substack{q=0, \dots, l \\ q \neq q_1, q'_1}} f(q_1) \neq f(q), \quad (\text{C.5})$$

to rozwiązanie ( C.3) dla transformaty  $\bar{\psi}_{nm}(\nu\mu\tau)$  można zapisać w postaci

$$\bar{\psi}_{nm}(\nu\mu s) = \sum_{l=0}^m \psi_{n+l, m-l}(\nu\mu\tau_0) [s + f(q_1)]^{-2} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q_1, q'_1}}^l [s + f(p)]^{-1}. \quad (\text{C.6})$$

Zauważmy, że odwrotna transformata rozwiązania ( C.6)

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(\nu\mu\tau) &= \sum_{l=0}^m \psi_{n+l, m-l}(\nu\mu\tau_0) \\ &\times \left\{ \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q_1, q'_1}}^l \exp[-f(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^l [f(p) - f(q)]^{-1} \right. \\ &+ \left( \Delta\tau - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq q_1, q'_1}}^l [f(k) - f(q_1)]^{-1} \right) \exp[-f(q_1)\Delta\tau] \\ &\left. \times \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q_1, q'_1}}^l [f(p) - f(q_1)]^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

jest pochodną (z przeciwnym znakiem) rozwiązania ( 114) względem zmiennej  $f(q_1)$  :

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(\nu\mu\tau) &= \sum_{l=0}^m \psi_{n+l, m-l}(\nu\mu\tau_0) \\ &\times \left( -\frac{\partial}{\partial f(q_1)} \right) \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q'_1}}^l \exp[-f(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q, q'_1}}^l [f(p) - f(q)]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

W przypadku  $d$  równych par, tj. gdy  $f(q_1) = f(q'_1), \dots, f(q_d) = f(q'_d)$ , rozwiązanie dla transformaty Laplace'a ( C.3) można zapisać w postaci

$$\bar{\psi}_{nm}(\nu\mu s) = \sum_{l=0}^m \psi_{n+l, m-l}(\nu\mu\tau_0)$$

$$\times \prod_{r=1}^d [s + f(q_r)]^{-2} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q_1, q'_1, \dots, q_d, q'_d}}^l [s + f(p)]^{-1}, \quad (\text{C.9})$$

co ostatecznie prowadzi nas do rozwiązania

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(\nu\mu\tau) &= \sum_{l=0}^m \psi_{n+l, m-l}(\nu\mu\tau_0) \left( (-1)^d \prod_{r=1}^d \frac{\partial}{\partial f(q_r)} \right) \\ &\times \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q'_1, \dots, q'_d}}^l \exp[-f(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q, q'_1, \dots, q'_d}}^l [f(p) - f(q)]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Jeśli zastosować operator różniczkowy  $\hat{D}$  ( 119) rzędu  $d$ , to rozwiązanie (C.10) można zapisać w postaci ( 118).

## Uzupełnienie D.

### Pole antystokesowskie w rozpraszaniu ramanowskim: rozwiązanie równania fundamentalnego

W paragrafie 3.1 przedstawiliśmy analizę rozpraszania ramanowskiego z uwzględnieniem pól stokesowskiego i antystokesowskiego. Natomiast w paragrafie 3.2 studiowaliśmy jedynie ewolucję pola stokesowskiego. Dla kompletności rozważań przedstawimy w tym uzupełnieniu analizę rozpraszania ramanowskiego typu antystokesowskiego uwzględniając kwantowy charakter pola pompującego. Pominiemy generację pola stokesowskiego

$$\gamma_S = \gamma_{AS} = \gamma_{SA} = 0 \quad (\text{D.1})$$

oraz założymy bardzo niską temperaturę kryształu, co oznacza:

$$\langle \hat{n}_V \rangle = 0. \quad (\text{D.2})$$

Przy tych warunkach równanie fundamentalne ( 69) w reprezentacji fokowskiej ma postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \rho_{nm}(\nu\mu\tau) &= -\frac{1}{2} [(n+1)m + (n+\nu+1)(m+\mu)] \rho_{nm}(\nu\mu\tau) \\ &+ [n(n+\nu)(m+1)(m+\mu+1)]^{1/2} \rho_{n-1, m+1}(\nu\mu\tau), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

gdzie dla prostoty przyjęliśmy notację  $n_L = n$ ,  $n'_L = n + \nu$  (tak jak w paragrafie 3.2) i  $n_A = m$ ,  $n'_A = m + \mu$ . Jeśli zdefiniować  $\lambda$  jako:

$$\lambda = \left\lceil \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} + \frac{\nu-\mu}{4} \right\rfloor \right\rceil, \quad (\text{D.4})$$

to rozwiązanie ( D.3) dla  $\lambda < 0$  jest równe

$$\begin{aligned} \rho_{nm}(\nu\mu\tau) &= \left[ \frac{n!(n+\nu)!}{m!(m+\mu)!} \right]^{1/2} \sum_{l=0}^n \rho_{n-l}^L(\nu\tau_0) \rho_{m+l}^A(\mu\tau_0) \\ &\times \left[ \frac{(m+l)!(m+l+\mu)!}{(n-l)!(n-l+\nu)!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_{q=0}^l \exp[-g(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^l [g(p) - g(q)]^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

podczas gdy dla  $\lambda \geq 0$  jest dane przez

$$\begin{aligned} \rho_{nm}(\nu\mu\tau) &= \left[ \frac{n!(n+\nu)!}{m!(m+\mu)!} \right]^{1/2} \left\{ \sum_{l=0}^{\lambda} \rho_{n-l}^L(\nu\tau_0) \rho_{m+l}^A(\mu\tau_0) \right. \\ &\times \left[ \frac{(m+l)!(m+l+\mu)!}{(n-l)!(n-l+\nu)!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_{q=0}^l \exp[-g(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^l [g(p) - g(q)]^{-1} \\ &+ (1 - \delta_{n0}) \sum_{l=\lambda+1}^n \rho_{n-l}^L(\nu\tau_0) \rho_{m+l}^A(\mu\tau_0) \\ &\times \left[ \frac{(m+l)!(m+l+\mu)!}{(n-l)!(n-l+\nu)!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_{q=0}^{\lambda} \sum_{q'=\lambda+1}^l \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{\lambda} [g(p) - g(q)]^{-1} \prod_{\substack{p'=\lambda+1 \\ p' \neq q'}}^l [g(p') - g(q')]^{-1} \\ &\times \left( \delta_{g(q)g(q')} \Delta\tau \exp[-g(q)\Delta\tau] \right. \\ &\left. + (\delta_{g(q)g(q')} - 1) \frac{\exp[-g(q)\Delta\tau] - \exp[-g(q')\Delta\tau]}{g(q) - g(q')} \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

We wzorach (D.5) i (D.6)  $g(x)$  oznacza

$$g(x) = \frac{1}{2}[(m+x)(n-x+1) + (m+x+\mu)(n-x+\nu+1)]. \quad (\text{D.7})$$

Rozwiązanie ( D.5)-( D.6) można zapisać w alternatywnej zwartej postaci

$$\begin{aligned}
\rho_{nm}(\nu\mu\tau) &= \left[ \frac{n!(n+\nu)!}{m!(m+\mu)!} \right]^{1/2} \sum_{l=0}^n \rho_{n-l}^L(\nu\tau_0) \rho_{m+l}^A(\mu\tau_0) \\
&\times \left[ \frac{(m+l)!(m+l+\mu)!}{(n-l)!(n-l+\nu)!} \right]^{1/2} \\
&\times \hat{\mathcal{D}} \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq q'_1, q'_2, \dots, q'_d}}^l \exp[-g(q)\Delta\tau] \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq q, q'_1, q'_2, \dots, q'_d}}^l [g(p) - g(q)]^{-1},
\end{aligned} \tag{D.8}$$

gdzie operator różniczkowy  $\hat{\mathcal{D}}$  zdefiniowaliśmy wzorem ( 119).

## Uzupełnienie E.

### Krótkoczasowe rozwiązania równania fundamentalnego ( 110)

W paragrafie 4.2.2 porównaliśmy różne formalizmy opisu rozpraszania ramanowskiego: metodę równania Fokkera-Plancka oraz metodę równania fundamentalnego w reprezentacji fokowskiej. Aby przedstawić pełniejsze porównanie różnych formalizmów podamy teraz rozwiązanie równania fundamentalnego ( 110) w przybliżeniu krótkoczasowym<sup>63</sup> (oznaczenie STA stosowane w literaturze anglosaskiej). Szczegółowe wyprowadzenie przedstawiliśmy w pracy [64]. Rozwiązania otrzymujemy korzystając z przybliżonego wzoru

$$\langle \hat{A}(\tau) \rangle = \text{Tr} \{ \hat{A}[\hat{\rho}(\tau_0) + \hat{\rho}'(\tau_0)\Delta\tau + \hat{\rho}''(\tau_0)(\Delta\tau)^2/2] \} \tag{E.1}$$

gdzie  $\Delta\tau = \tau - \tau_0$  oraz wyrażenie na  $\hat{\rho}''(\tau_0)$  otrzymuje się przez różniczkowanie równania ( 110) po czasie  $\tau$ . Zastosujemy kwadratowe STA, a czasem z konieczności przybliżenie sześciennie. Wzory na średnią liczbę fotonów  $\langle \hat{n}(\tau) \rangle$  w polu laserowym oraz jej średni kwadrat  $\langle \hat{n}^2(\tau) \rangle$  podał Simaan w pracy [89]. Analogiczne wzory dla pola stokesowskiego mają postać:

$$\langle \hat{m}(\tau) \rangle = \langle \hat{m} \rangle + \langle \hat{n} \rangle (\langle \hat{m} \rangle + 1) \Delta\tau$$

---

<sup>63</sup>ang. short time approximation

$$\begin{aligned}
& - \left[ \langle \hat{m}^2 \rangle \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{m} \rangle (3 \langle \hat{n} \rangle - \langle \hat{n}^2 \rangle) + 2 \langle \hat{n} \rangle - \langle \hat{n}^2 \rangle \right] \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \\
& + \left[ \langle \hat{m}^3 \rangle \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{m}^2 \rangle (7 \langle \hat{n} \rangle - 4 \langle \hat{n}^2 \rangle) + \langle \hat{m} \rangle (14 \langle \hat{n} \rangle - 12 \langle \hat{n}^2 \rangle + \langle \hat{n}^3 \rangle) \right. \\
& \left. + 8 \langle \hat{n} \rangle - 8 \langle \hat{n}^2 \rangle + \langle \hat{n}^3 \rangle \right] \frac{(\Delta\tau)^3}{6},
\end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle & = \langle \hat{m}^2 \rangle + \langle \hat{n} \rangle (2 \langle \hat{m}^2 \rangle + 3 \langle \hat{m} \rangle + 1) \Delta\tau \\
& - \left[ 2 \langle \hat{m}^3 \rangle \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{m}^2 \rangle (9 \langle \hat{n} \rangle - 4 \langle \hat{n}^2 \rangle) \right. \\
& \left. + \langle \hat{m} \rangle (13 \langle \hat{n} \rangle - 9 \langle \hat{n}^2 \rangle) + 6 \langle \hat{n} \rangle - 5 \langle \hat{n}^2 \rangle \right] \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \\
& + \left[ 2 \langle \hat{m}^4 \rangle \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{m}^3 \rangle (21 \langle \hat{n} \rangle - 14 \langle \hat{n}^2 \rangle) \right. \\
& + \langle \hat{m}^2 \rangle (73 \langle \hat{n} \rangle - 72 \langle \hat{n}^2 \rangle + 8 \langle \hat{n}^3 \rangle) \\
& + \langle \hat{m} \rangle (102 \langle \hat{n} \rangle - 118 \langle \hat{n}^2 \rangle + 21 \langle \hat{n}^3 \rangle) \\
& \left. + 48 \langle \hat{n} \rangle - 60 \langle \hat{n}^2 \rangle + 13 \langle \hat{n}^3 \rangle \right] \frac{(\Delta\tau)^3}{6}.
\end{aligned} \tag{E.3}$$

Dla prostoty stosowaliśmy notację  $\langle \hat{n}^p(\tau_0) \rangle = \langle \hat{n}^p \rangle$  i  $\langle \hat{m}^p(\tau_0) \rangle = \langle \hat{m}^p \rangle$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Łatwo zauważyć, że jest spełniona zasada zachowania całkowitej liczby fotonów (przynajmniej z dokładnością do  $(\Delta\tau)^2$ ), co jest potwierdzeniem wniosku (111). Współczynnik korelacji  $\gamma_L^{(2)}(\tau)$  (E.7) dla pola laserowego jest równy

$$\begin{aligned}
\gamma_L^{(2)}(\tau) & = \gamma_L^{(2)} + [(\langle \hat{n}^2 \rangle^2 - \langle \hat{n}^3 \rangle \langle \hat{n} \rangle)(1 + \langle \hat{m} \rangle) \\
& + \langle \hat{n} \rangle (\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle)(1 + \langle \hat{m} \rangle - \langle \hat{m} \rangle^2 + \langle \hat{m}^2 \rangle)] \langle \hat{n} \rangle^{-3} (\Delta\tau)^2,
\end{aligned} \tag{E.4}$$

i redukuje się do wyniku Simaana [89] w szczególnym przypadku, gdy nie ma fotonów stokesowskich w chwili początkowej  $\tau_0$ , tj., gdy  $\langle \hat{m} \rangle = \langle \hat{m}^2 \rangle = 0$ . Dla pól laserowego i stokesowskiego znajdujących się początkowo w stanach koherentnych  $|\alpha_L\rangle$  i  $|\alpha_S\rangle$  wyrażenie (E.4) sprowadza się do prostego wzoru  $\gamma_L^{(2)} = |\alpha_S|^2 (\Delta\tau)^2$ . Ewolucję momentów  $\langle \hat{n}(\tau) \rangle$ ,  $\langle \hat{m}(\tau) \rangle$ ,  $\langle \hat{n}^2(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle$  dla początkowych rozkładów koherentnych, pokazano na rys. 11 i 12. Krzywe B wykreślono w korzystając ze wzorów Simaana na  $\langle \hat{n}(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{n}^2(\tau) \rangle$  oraz naszych (E.2) i (E.3).

Współczynnik korelacji  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$ , (i) przy założeniu niezerowej średniej liczby fotonów  $\langle \hat{m} \rangle$  wynosi

$$\gamma_S^{(2)}(\tau) = \gamma_S^{(2)} - 2(\langle \hat{m}^2 \rangle - 2\langle \hat{m} \rangle^2 - \langle \hat{m} \rangle \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{m} \rangle^{-3}) \Delta\tau$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \langle \hat{m}^3 \rangle \langle \hat{m} \rangle^2 \langle \hat{n} \rangle - \langle \hat{m}^2 \rangle^2 \langle \hat{m} \rangle \langle \hat{n} \rangle \right. \\
& + \langle \hat{m}^2 \rangle \langle \hat{m} \rangle^2 (\langle \hat{n} \rangle^2 + 2 \langle \hat{n} \rangle - \langle \hat{n}^2 \rangle) \\
& - \langle \hat{m}^2 \rangle \langle \hat{m} \rangle (2 \langle \hat{n} \rangle^2 + 2 \langle \hat{n} \rangle - \langle \hat{n}^2 \rangle) \\
& - 3 \langle \hat{m}^2 \rangle \langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{m} \rangle^3 (7 \langle \hat{n} \rangle^2 + 8 \langle \hat{n} \rangle - 5 \langle \hat{n}^2 \rangle) \\
& + \langle \hat{m} \rangle^2 (10 \langle \hat{n} \rangle^2 + 4 \langle \hat{n} \rangle - 3 \langle \hat{n}^2 \rangle) \\
& \left. + 3 \langle \hat{m} \rangle \langle \hat{n} \rangle^2 \right] \langle \hat{m} \rangle^{-4} (\Delta\tau)^2,
\end{aligned} \tag{E.5}$$

natomiast w przypadku, gdy (ii) wszystkie momenty  $\langle \hat{m}^k \rangle$  (dla  $k = 1, 2, \dots$ ) znikają, to  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
\gamma_S^{(2)}(\tau) &= 2\gamma_L^{(2)} + 1 + \left( 6 \langle \hat{n}^3 \rangle - 6 \langle \hat{n}^2 \rangle^2 / \langle \hat{n} \rangle \right. \\
&\quad \left. - 8 \langle \hat{n}^2 \rangle + 8 \langle \hat{n} \rangle \right) \langle \hat{n} \rangle^{-2} \frac{\Delta\tau}{3}.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Podkreślamy, że w wyprowadzeniu wzoru ( E.6) wykorzystaliśmy rozwinięcia  $\langle \hat{m}(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{m}^2(\tau) \rangle$  do trzeciej potęgi czasu,  $(\Delta\tau)^3$ . Uwzględnienie tych członów jest konieczne, aby otrzymać prawidłową zależność  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  od  $\Delta\tau$ . Wyrażenie otrzymane przez Simaana (równanie (33) w artykule [89]) nie zgadza się z naszym wzorem ( E.6). Na rys. 15a porównaliśmy ewolucję współczynników  $\gamma_S^{(2)}(\tau)$  dla pola stokesowskiego wyznaczonych z różnych wzorów, a w szczególności z ( E.6) (krzywa B) oraz ścisłego rozwiązania (krzywa A) omówionego w §3.2.1. Wyniku Simaana nie przedstawiliśmy na wykresie, gdyż taka krzywa znacznie by się różniła od pozostałych A–C. Dla pól promienionowania znajdujących się początkowo w stanach koherentnych równania ( E.5) i ( E.6) upraszczają się odpowiednio do wzorów:

$$\begin{aligned}
\gamma_S^{(2)}(\tau) &= 2|\alpha_L|^2 |\alpha_S|^{-2} \Delta\tau - \left( 2|\alpha_S|^4 + 3|\alpha_S|^2 \right. \\
&\quad \left. + 3|\alpha_L|^2 + |\alpha_S|^2 |\alpha_L|^2 \right) |\alpha_L|^2 |\alpha_S|^{-4} (\Delta\tau)^2,
\end{aligned} \tag{E.7}$$

$$\gamma_S^{(2)}(\tau) = 1 - \frac{2}{3} \Delta\tau. \tag{E.8}$$

Dwumodowy współczynnik korelacji  $g_{LS}^{(2)}$  dany wzorem ( 202) można otrzymać z wyrażeń na  $\langle \hat{m}(\tau) \rangle$  ( E.2),  $\langle \hat{n}(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{n}(\tau) \hat{m}(\tau) \rangle$  (dwa ostatnie rozwiązania przedstawiliśmy



w [64]). Po przekształceniach otrzymujemy dwa wyrażenia na  $g_{LS}^{(2)}$  w zależności od początkowej liczby fotonów w polu stokesowskim: (i) jeśli  $\langle \hat{m} \rangle \neq 0$  to zachodzi

$$\begin{aligned}
g_{LS}^{(2)}(\tau) &= \left[ \langle \hat{n}^2 \rangle (\langle \hat{m} \rangle + 1) + \langle \hat{n} \rangle (\langle \hat{m} \rangle^2 - \langle \hat{m} \rangle - \langle \hat{m}^2 \rangle - 1) \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{n} \rangle^2 (\langle \hat{m} \rangle + 1) \right] (\langle \hat{n} \rangle \langle \hat{m} \rangle)^{-1} \Delta\tau \\
&\quad + \left\{ \langle \hat{n}^3 \rangle \langle \hat{m} \rangle (\langle \hat{m} \rangle + 1) + \langle \hat{n}^2 \rangle \langle \hat{m} \rangle (3\langle \hat{m} \rangle^2 - 6\langle \hat{m} \rangle - 4\langle \hat{m}^2 \rangle - 5) \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{n}^2 \rangle \langle \hat{n} \rangle (3\langle \hat{m} \rangle^2 + 5\langle \hat{m} \rangle + 2) \right. \\
&\quad \left. + \langle \hat{n} \rangle \langle \hat{m} \rangle [2\langle \hat{m} \rangle^3 - 3\langle \hat{m} \rangle^2 + \langle \hat{m} \rangle (5 - 3\langle \hat{m}^2 \rangle) \right. \\
&\quad \left. + 4\langle \hat{m}^2 \rangle + \langle \hat{m}^3 \rangle + 4] \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{n} \rangle^2 [2\langle \hat{m} \rangle^3 - 3\langle \hat{m} \rangle^2 - 3\langle \hat{m} \rangle (\langle \hat{m}^2 \rangle + 2) - 2(\langle \hat{m}^2 \rangle + 1)] \right. \\
&\quad \left. + 2\langle \hat{n} \rangle^3 (\langle \hat{m} \rangle^2 + 2\langle \hat{m} \rangle + 1) \right\} \langle \hat{m} \rangle^{-2} \langle \hat{n} \rangle \frac{(\Delta\tau)^2}{2},
\end{aligned} \tag{E.9}$$

w przeciwnym razie, gdy (ii)  $\langle \hat{m} \rangle = \langle \hat{m}^2 \rangle = \langle \hat{m}^3 \rangle = \langle \hat{m}^4 \rangle = 0$ , to mamy

$$\begin{aligned}
g_{LS}^{(2)}(\tau) &= \gamma_L^{(2)} + \left( \langle \hat{n}^3 \rangle - \langle \hat{n}^2 \rangle^2 / \langle \hat{n} \rangle \right. \\
&\quad \left. - 2\langle \hat{n}^2 \rangle + 2\langle \hat{n} \rangle \right) \langle \hat{n} \rangle^{-2} \frac{\Delta\tau}{2} \\
&\quad - \left( 6\langle \hat{n}^4 \rangle \langle \hat{n} \rangle^2 + 5\langle \hat{n}^3 \rangle \langle \hat{n}^2 \rangle \langle \hat{n} \rangle \right. \\
&\quad \left. - 12\langle \hat{n}^3 \rangle \langle \hat{n} \rangle^2 - 3\langle \hat{n}^2 \rangle^3 - 22\langle \hat{n}^2 \rangle^2 \langle \hat{n} \rangle \right. \\
&\quad \left. + 26\langle \hat{n}^2 \rangle \langle \hat{n} \rangle^2 \right) \langle \hat{n} \rangle^{-4} \frac{(\Delta\tau)^2}{12}.
\end{aligned} \tag{E.10}$$

Jeśli obydwa pola (laserowe i stokesowskie) są początkowo koherentne, to równania ( E.9) i ( E.10) redukują się do postaci

$$\gamma_{LS}^{(2)}(\tau) = -\Delta\tau + (|\alpha_S|^2 - 2|\alpha_S|^2|\alpha_L|^2 + |\alpha_L|^2) |\alpha_S|^{-2} \frac{(\Delta\tau)^2}{2}, \tag{E.11}$$

$$\gamma_{LS}^{(2)}(\tau) = -\frac{\Delta\tau}{2} + (1 - 13|\alpha_L|^2 - 8|\alpha_L|^4) \frac{(\Delta\tau)^2}{12}. \tag{E.12}$$

W wyprowadzeniu zależności ( E.10), z kwadratową zależnością od  $\Delta\tau$ , wymagana jest znajomość  $\langle \hat{n}(\tau)\hat{m}(\tau) \rangle$  z dokładnością do  $(\Delta\tau)^3$ , podobnie jak w dowodzie rozwiązania ( E.6). Simaan [89] wyprowadził wyrażenie odpowiadające naszemu ( E.10). Jednak nie ma pełnej zgodności między jego wynikiem a naszym. Przykłady ewolucji dwumodowych współczynników korelacji  $g_{LS}^{(2)}$  dla pól początkowo koherentnych przedstawiliśmy

na rys. 17. Krzywą B na rys. 17a i 17b wyznaczono ze wzorów ( E.10) i ( E.9) (z dokładnością do  $\Delta\tau$ ). Krzywą S na rys. 17a wykreślono z pomocą przybliżonego (w STA) rozwiązania Simaana (32) w artykule [89]. Można porównać te wyniki (krzywe B i S) z krzywą A wyznaczoną ze ścisłego rozwiązania równania fundamentalnego ( 110). Widać, że nasze przybliżone rozwiązanie ( E.10) dla czasów  $\Delta\tau \leq 0.1$  dokładnie pokrywa się ze ścisłym wynikiem, w przeciwieństwie do krzywej Simaana.

W analogii do momentów statystycznych liczby fotonów wyliczonych dla krótkich czasów ewolucji układu, wyznaczmy również średnie wartości operatorów kreacji  $\langle \hat{a}_k^+(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{a}_k^{+2}(\tau) \rangle$  dla dwóch pól ( $k = L, S$ ). Po dokonaniu odpowiedniego przeliczenia uzyskaliśmy wyniki:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_S^+(\tau) \rangle &= \langle \hat{a}_S^+ \rangle + \langle \hat{a}_L^+ \hat{a}_L \rangle \langle \hat{a}_S^+ \rangle \frac{\Delta\tau}{2} \\ &+ (\langle \hat{a}_L^{+2} \hat{a}_L^2 \rangle \langle \hat{a}_S^+ \rangle - 2\langle \hat{a}_L^+ \hat{a}_L \rangle \langle \hat{a}_S^{+2} \hat{a}_S \rangle - 3\langle \hat{a}_L^+ \hat{a}_L \rangle \langle \hat{a}_S^+ \rangle) \frac{(\Delta\tau)^2}{8}, \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_L^+(\tau) \rangle &= \langle \hat{a}_L^+ \rangle - \langle \hat{a}_L^+ \rangle (\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_S \rangle + 1) \frac{\Delta\tau}{2} + [\langle \hat{a}_L^+ \rangle \langle \hat{a}_S^{+2} \hat{a}_S^2 \rangle \\ &- 2\langle \hat{a}_L^{+2} \hat{a}_L \rangle (\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_S \rangle + 1) + \langle \hat{a}_L^+ \rangle (3\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_S \rangle + 1)] \frac{(\Delta\tau)^2}{8}, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_S^{+2}(\tau) \rangle &= \langle \hat{a}_S^{+2} \rangle + \langle \hat{a}_L^+ \hat{a}_L \rangle \langle \hat{a}_S^{+2} \rangle \Delta\tau \\ &+ (\langle \hat{a}_L^{+2} \hat{a}_L^2 \rangle \langle \hat{a}_S^{+2} \rangle - \langle \hat{a}_L^+ \hat{a}_L \rangle \langle \hat{a}_S^{+3} \hat{a}_S \rangle - 2\langle \hat{a}_L^+ \hat{a}_L \rangle \langle \hat{a}_S^{+2} \rangle) \frac{(\Delta\tau)^2}{2}, \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_L^{+2}(\tau) \rangle &= \langle \hat{a}_L^{+2} \rangle - \langle \hat{a}_L^{+2} \rangle (\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_S \rangle + 1) \Delta\tau + [\langle \hat{a}_L^{+2} \rangle \langle \hat{a}_S^{+2} \hat{a}_S^2 \rangle \\ &- \langle \hat{a}_L^{+3} \hat{a}_L \rangle (\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_S \rangle + 1) + \langle \hat{a}_L^{+2} \rangle (3\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_S \rangle + 1)] \frac{(\Delta\tau)^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Podobnie wyznaczyliśmy wzory na funkcje korelacji wzajemnej  $\langle \hat{a}_L^+(\tau) \hat{a}_S^+(\tau) \rangle$  i  $\langle \hat{a}_L(\tau) \hat{a}_S^+(\tau) \rangle$ , które przedstawiliśmy w artykule [64]. Dla prostoty ograniczymy nasze rozważania do pól początkowo koherentnych o amplitudach:  $\alpha_S = |\alpha_S| \exp(i\phi_S)$  dla pola stokesowskiego i  $\alpha_L = |\alpha_L| \exp(i\phi_L)$  dla pola antystokesowskiego. Na rys. 13 i 14 przedstawiliśmy ewolucję następujących momentów:  $\langle \hat{a}_S(\tau) \rangle$  zgodnie z ( E.13) (linia ciągła B na rys. 13);  $\langle \hat{a}_L(\tau) \rangle$  ( E.14) (linia przerywana B na rys. 13);  $\langle \hat{a}_S^2(\tau) \rangle$  ( E.15) (linia ciągła B na rys. 14); oraz  $\langle \hat{a}_L^2(\tau) \rangle$  ( E.16) (linia przerywana B na rys. 14). Aby

otrzywać wzory na wartości jednomodowe ( 207) i dwumodowe ( 216) wariancje oraz kowariancje Wignera ( 217) skorzystamy ze wzorów ( E.2), ( E.3) i ( E.13)–( E.16) oraz  $\langle \hat{a}_k^{+p} \hat{a}_k^q \rangle = |\alpha_k|^{p+q} \exp[-i(p-q)\phi_k]$  ( $k = S, A$ ) dla pól początkowo w stanie koherentnym. Po obliczeniach otrzymujemy następujące jednomodowe wariancje:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{X}_S(\theta))^2 \rangle &= 1 + 2|\alpha_L|^2 \Delta\tau + |\alpha_L|^2 \{ |\alpha_L|^2 \\ &\quad - [1 + \cos^2(\theta - \phi_S)] |\alpha_S|^2 - 1 \} (\Delta\tau)^2, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_L(\theta))^2 \rangle = 1 + \frac{1}{2} [\cos(2\theta - 2\phi_L) + 1] |\alpha_L|^2 |\alpha_S|^2 (\Delta\tau)^2. \quad (\text{E.18})$$

W szczególności wariancja w jednej z osi głównych ma postać

$$\langle (\Delta \hat{X}_{S-})^2 \rangle = 1 + 2|\alpha_L|^2 \Delta\tau + |\alpha_L|^2 (|\alpha_L|^2 - 2|\alpha_S|^2 - 1) (\Delta\tau)^2, \quad (\text{E.19})$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_{L-})^2 \rangle = 1. \quad (\text{E.20})$$

Pozostałe wariancje  $\langle (\Delta \hat{X}_{S+})^2 \rangle$  i  $\langle (\Delta \hat{X}_{L+})^2 \rangle$  bezpośrednio wynikają z ( E.17) i ( E.18). Ewolucję wariancji ( E.17)–( E.20) przedstawiliśmy na rys. 18 i 19 (dla  $\phi_L = 0$ ), mianowicie:  $\langle (\Delta \hat{X}_{S-}(\tau))^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{X}_{S2}(\tau))^2 \rangle$  (linia ciągła B na rys. 18),  $\langle (\Delta \hat{X}_{S+}(\tau))^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{X}_{S1}(\tau))^2 \rangle$  (linia przerywana B na rys. 18),  $\langle (\Delta \hat{X}_{L-}(\tau))^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{X}_{L1}(\tau))^2 \rangle$  (linia ciągła B na rys. 19),  $\langle (\Delta \hat{X}_{L+}(\tau))^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{X}_{L2}(\tau))^2 \rangle$  (linia przerywana B na rys. 19).

Aby wyznaczyć dwumodowe wariancje  $\langle (\Delta \hat{X}_{LS}(\theta))^2 \rangle$ , w szczególności  $\langle (\Delta \hat{X}_{LS,1,2})^2 \rangle$  i ekstremalne wariancje  $\langle (\Delta \hat{X}_{LS\pm})^2 \rangle$ , skorzystać można ze wzorów ( 216)–( 217), których szczegółową postać przedstawiliśmy w pracy [64]. Po dość żmudnych obliczeniach otrzymujemy wzory na dwumodowe wariancje kwadratur:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{X}_{LS,1,2})^2 \rangle &= 2 + 2\{ |\alpha_L|^2 - |\alpha_L| |\alpha_S| [\cos(\phi_L - \phi_S) \pm \cos(\phi_L + \phi_S)] \} \Delta\tau \\ &\quad + \left\{ 2|\alpha_L|^2 (|\alpha_L|^2 - |\alpha_S|^2 - 1) \pm |\alpha_L|^2 |\alpha_S|^2 (\cos 2\phi_L - \cos 2\phi_S) \right. \\ &\quad - |\alpha_S| |\alpha_L| [\cos(\phi_L - \phi_S) (4|\alpha_L|^2 - 6|\alpha_S|^2 - 11) \\ &\quad \left. \pm \cos(\phi_L + \phi_S) (4|\alpha_L|^2 - 2|\alpha_S|^2 - 3)] \right\} \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

oraz wyrażenia na dwumodowe ekstremalne wariancje

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta \hat{X}_{LS\pm})^2 \rangle &= 2 + 2 [|\alpha_L|^2 - |\alpha_L||\alpha_S| \cos(\phi_L - \phi_S)] \Delta\tau \\
&+ [|\alpha_L|^2 (|\alpha_L|^2 - |\alpha_S|^2 - 1) \\
&- |\alpha_L||\alpha_S| \cos(\phi_L - \phi_S) \left( 2|\alpha_L|^2 - 3|\alpha_S|^2 - \frac{11}{2} \right)] (\Delta\tau)^2 \\
&\pm \left| 2\alpha_L\alpha_S\Delta\tau + [|\alpha_L|^2\alpha_S^2 - |\alpha_S|^2\alpha_L^2 \right. \\
&+ \left. \alpha_L\alpha_S(4|\alpha_L|^2 - 2|\alpha_S|^2 - 3)] \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \right|, \tag{E.22}
\end{aligned}$$

Powyższe wzory można uogólnić na przypadek dowolnej początkowej statystyki pól promieniowania.

## Uzupełnienie F.

### Stany koherentne w skończenie wymiarowej przestrzeni $\Psi$ : elementy konstrukcji

W §5.3 podaliśmy analityczną postać stanów koherentnych  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  w przestrzeni  $\Psi$  w reprezentacji fokowskiej. W tym uzupełnieniu przedstawimy więcej szczegółów dotyczących konstrukcji stanów  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$ . Zapiszemy w jawnej postaci  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  w przestrzeniach o wartościach  $\sigma=1,2,3,4$ . Podamy wzory przybliżone określające  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$ . Przeanalizujemy zagadnienie zbieżności  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  do  $|\alpha\rangle$ , gdy  $\sigma \rightarrow \infty$ . Porównamy nasz problem z zagadnieniem analizowanym przez Figurnego, Orłowskiego i Wódkiewicza [346].

W celu określenia wzorów rekurencyjnych (317)– (323), zapiszemy operator  $\hat{T}^n$  (306) działający na stan próżni

$$\hat{T}^n |0\rangle = \sum_{k=0}^{[n/2]} d_{n,n-2k}^{(\sigma)} (-\alpha^*)^k \alpha^{n-k} |n-2k\rangle. \tag{F.1}$$

za pomocą funkcji Heaviside'a (322):

$$\hat{T} |0\rangle = u_1 \alpha |1\rangle$$

$$\begin{aligned}
\hat{T}^2|0\rangle &= u_1(-\alpha^*)\alpha|0\rangle + u_2\alpha^2||2\rangle \\
\hat{T}^3|0\rangle &= (u_1 + 2u_2)(-\alpha^*)\alpha^2||1\rangle + u_3\alpha^3||3\rangle \\
\hat{T}^4|0\rangle &= (u_1 + 2u_2)(-\alpha^*)^2\alpha^2||0\rangle + (3u_2 + 3u_3)(-\alpha^*)\alpha^3||2\rangle + u_4\alpha^4||4\rangle \\
\hat{T}^5|0\rangle &= (u_1 + 8u_2 + 6u_3)(-\alpha^*)^2\alpha^3||1\rangle + (6u_3 + 4u_4)(-\alpha^*)\alpha^4||3\rangle + u_5\alpha^5||5\rangle \\
&\dots \quad \dots
\end{aligned} \tag{F.2}$$

Bliższa analiza symetrii wzorów (F.1) prowadzi nas do związków rekurencyjnych zamieszczonych w §5.3, w szczególności do wzoru (323).

Aby znaleźć rozwiązanie relacji (317)–(323) wykorzystamy pewne własności współczynników  $d_{n,k}^{(\sigma)}$ . Dla  $\sigma = 1, 2$  zauważamy, że zachodzi:

$$\frac{d_{n+2,k}^{(\sigma)}}{d_{n,k}^{(\sigma)}} = \text{const} = \beta_1^{(\sigma)}. \tag{F.3}$$

Dla  $\sigma = 3, 4$  zachodzi

$$\frac{d_{n+4,k}^{(\sigma)} - \beta_1^{(\sigma)}d_{n+2,k}^{(\sigma)}}{d_{n+2,k}^{(\sigma)} - \beta_1^{(\sigma)}d_{n,k}^{(\sigma)}} = \text{const} = \beta_2^{(\sigma)}. \tag{F.4}$$

Dla  $\sigma = 5, 6$  mamy

$$\frac{\left(d_{n+6,k}^{(\sigma)} - \beta_1^{(\sigma)}d_{n+4,k}^{(\sigma)}\right) - \beta_2^{(\sigma)}\left(d_{n+4,k}^{(\sigma)} - \beta_1^{(\sigma)}d_{n+2,k}^{(\sigma)}\right)}{\left(d_{n+4,k}^{(\sigma)} - \beta_1^{(\sigma)}d_{n+2,k}^{(\sigma)}\right) - \beta_2^{(\sigma)}\left(d_{n+2,k}^{(\sigma)} - \beta_1^{(\sigma)}d_{n,k}^{(\sigma)}\right)} = \text{const} = \beta_3^{(\sigma)}. \tag{F.5}$$

Te własności dla  $\Psi$  o małej liczbie wymiarów ( $\sigma + 1$ ) bez trudu dają się uogólnić na dowolnie ( $\sigma + 1$ )-wymiarową przestrzeń  $\Psi$ .

We wzorach (F.3)–(F.5) występują współczynniki  $\beta_k^{(\sigma)}$ , które można wyznaczyć z równania

$$0 = G^{(\sigma)}(\beta) \equiv \sum_{i=0}^r (-1)^i d_{\sigma+1, \sigma+1-2i}^{(\sigma)} \beta^{r-i}. \tag{F.6}$$

Współczynniki  $\beta_k^{(\sigma)}$  w (F.3)–(F.5) ponumerowaliśmy w kolejności malejącej  $\beta_1^{(\sigma)} > \beta_2^{(\sigma)} \dots > \beta_r^{(\sigma)}$ , choć można przyjąć inną konwencję.

Zauważamy następującą własność wielomianów  $G^{(\sigma)}$

$$\frac{d}{dx} G^{(2\sigma+1)}(x) = (\sigma + 1)G^{(2\sigma)}(x), \tag{F.7}$$

co oznacza, że miejsca zerowe  $G^{(2\sigma)}$  odpowiadają punktom ekstremalnym wielomianu  $G^{(2\sigma+1)}$ . To jest cecha charakterystyczna wielomianów Hermite'a. Jeśli porównać wzór (F.6) na  $G^{(\sigma)}$  z definicją  $H^{(\sigma)}$  to otrzymamy

$$G^{(\sigma)}(\beta) = 2^{-\sigma/2} [1 + \delta_{\sigma,1 \pmod{2}} \cdot (\beta^{-1/2} - 1)] H_{\sigma+1}(\sqrt{\beta/2}), \quad (\text{F.8})$$

co bezpośrednio prowadzi nas do relacji (325), orzekającej, że współczynniki  $\beta_k^{(\sigma)}$  są *dotatnimi* pierwiastkami kwadratowymi miejsc zerowych wielomianu Hermite'a rzędu  $(\sigma + 1)$ . Równanie (325) dla  $\beta_k^{(\sigma)}$  można zapisać w postaci (326) dla  $x_k^{(\sigma)} \equiv (\beta_k^{(\sigma)})^{1/2}$ .

W przestrzeni o określonej liczbie wymiarów, zbiór wszystkich współczynników  $\beta_i^{(\sigma)}$  ( $i = 1, \dots, r = \lceil(\sigma + 1)/2\rceil$ ) spełnia następujące warunki symetrii:

$$\sum_{i=1}^r \beta_i^{(\sigma)} = d_{\sigma+1, \sigma-1} = \binom{\sigma + 1}{2} \quad (\text{F.9})$$

oraz

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^r \beta_i^{(\sigma)} &= (2r + (-1)^\sigma)!! \\ &= \begin{cases} d_{\sigma+1,0} = \sigma!! & \text{jeśli } \sigma = 1 \pmod{2} \\ d_{\sigma+1,1} = d_{\sigma+2,0} = (\sigma + 1)!! & \text{jeśli } \sigma = 0 \pmod{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Z uwagi na nietypowy argument wielomianów (325) podamy kilka przykładów współczynników  $\beta_i^{(\sigma)}$  w postaci symetrycznej. Dla  $\sigma=1, 2, 3, 4$  mamy

$$\beta_1^{(1)} = 1, \quad (\text{F.11})$$

$$\beta_1^{(2)} = 3, \quad (\text{F.12})$$

$$\begin{aligned} \beta_k^{(3)} &= 3 + \sqrt{6} \cos\left(\frac{k-1}{2}2\pi\right) \\ &= 3 \pm \sqrt{6}, \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned} \beta_k^{(4)} &= 5 + \sqrt{10} \cos\left(\frac{k-1}{2}2\pi\right) \\ &= 5 \pm \sqrt{10}. \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Dla  $\sigma=5$ :

$$\beta_k^{(5)} = 5 + 2\sqrt{10} \cos\left(\phi - \frac{k-1}{3}2\pi\right), \quad (\text{F.15})$$

gdzie

$$\phi = \frac{1}{3} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right). \quad (\text{F.15a})$$

Dla  $\sigma=6$ :

$$\beta_k^{(6)} = 7 + 2\sqrt{14} \cos\left(\phi - \frac{k-1}{3}2\pi\right), \quad (\text{F.16})$$

gdzie

$$\phi = \frac{1}{3} \arctan\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right). \quad (\text{F.16a})$$

Dla  $\sigma=7$ :

$$\beta_k^{(7)} = 7 + y_k - [(7 + y_k)^2 - y_k(z^2 - 105) - z]^{1/2}, \quad (\text{F.17})$$

gdzie

$$y_k = \sqrt{2} \cos\left(k\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi\right) \frac{7z - 105}{\sqrt{z^2 - 105}}, \quad (\text{F.17a})$$

$$z = 35 + 4\sqrt{70} \cos(\phi), \quad (\text{F.17b})$$

$$\phi = \frac{1}{3} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right). \quad (\text{F.17c})$$

Dla  $\sigma=8$ :

$$\beta_k^{(8)} = 9 + y_k - [(9 + y_k)^2 - y_k(z^2 - 945) - z]^{1/2}, \quad (\text{F.18})$$

gdzie

$$y_k = \sqrt{2} \cos\left(k\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi\right) \frac{9z - 315}{\sqrt{z^2 - 945}}, \quad (\text{F.18a})$$

$$z = 63 + 4\sqrt{126} \cos(\phi), \quad (\text{F.18b})$$

$$\phi = \frac{1}{3} \arctan \left( \sqrt{\frac{5}{9}} \right). \quad (\text{F.18c})$$

Wyszczególnione współczynniki  $\beta_i^{(\sigma)}$  (F.11)– (F.18) przyjmują wartości:

$$\begin{aligned} \beta_1^{(1)} &= 1 \\ \beta_1^{(2)} &= 3 \\ \beta_1^{(3)} &= 5.44949, \quad \beta_2^{(3)} = 0.55051 \\ \beta_1^{(4)} &= 8.16228, \quad \beta_2^{(4)} = 1.83772 \\ \beta_1^{(5)} &= 11.0507, \quad \beta_2^{(5)} = 3.56899, \quad \beta_3^{(5)} = 0.380327 \\ \beta_1^{(6)} &= 14.0658, \quad \beta_2^{(6)} = 5.60155, \quad \beta_3^{(6)} = 1.33265 \\ \beta_1^{(7)} &= 17.1773, \quad \beta_2^{(7)} = 7.85393, \quad \beta_3^{(7)} = 2.67819, \quad \beta_4^{(7)} = 0.290607 \\ \beta_1^{(8)} &= 20.3649, \quad \beta_2^{(8)} = 10.2748, \quad \beta_3^{(8)} = 4.3133, \quad \beta_4^{(8)} = 1.04705. \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

Współczynniki  $\gamma_{nl}^{(\sigma)}$  pojawiają się w rozwiązaniu wzorów rekurencyjnych (317)– (323):

$$\begin{aligned} \gamma_{n,l}^{(\sigma)} &= \gamma_{\sigma-p,l}^{(\sigma)} = (\beta_l^{(\sigma)})^{r-1} \\ &- (\beta_l^{(\sigma)})^{r-2} \sum_{p_1=1}^{p-1} (\sigma - p_1 + 1) \\ &+ (\beta_l^{(\sigma)})^{r-3} \sum_{p_2=1}^{p-3} \sum_{p_1=1}^{p_2} (\sigma - p_2 - 1)(\sigma - p_1 + 1) \\ &- (\beta_l^{(\sigma)})^{r-4} \sum_{p_3=1}^{p-5} \sum_{p_2=1}^{p_3} \sum_{p_1=1}^{p_2} (\sigma - p_3 - 3)(\sigma - p_2 - 1)(\sigma - p_1 + 1) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Powyższy wzór zapisaliśmy w §5.3 w postaci zwartej ( 329a-b). W szczególnych przy-



padkach, gdy  $\sigma = 1, 2, \dots, 7$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\gamma_{11}^{(1)} &= 1 & \gamma_{11}^{(2)} &= 1 \\
\gamma_{2l}^{(3)} &= \beta_l^{(3)} & \gamma_{1l}^{(3)} &= \beta_l^{(3)} - 3 \\
\gamma_{3l}^{(4)} &= \beta_l^{(4)} & \gamma_{2l}^{(4)} &= \beta_l^{(4)} - 4 & \gamma_{1l}^{(4)} &= \beta_l^{(4)} - 7 \\
\gamma_{4l}^{(5)} &= (\beta_l^{(5)})^2 & \gamma_{3l}^{(5)} &= \beta_l^{(5)} (\beta_l^{(5)} - 5) \\
\gamma_{2l}^{(5)} &= \beta_l^{(5)} (\beta_l^{(5)} - 9) & \gamma_{1l}^{(5)} &= (\beta_l^{(5)})^2 - 12\beta_l^{(5)} + 15 \\
\gamma_{5l}^{(6)} &= (\beta_l^{(6)})^2 & \gamma_{4l}^{(6)} &= \beta_l^{(6)} (\beta_l^{(6)} - 6) & \gamma_{3l}^{(6)} &= \beta_l^{(6)} (\beta_l^{(6)} - 11) \\
\gamma_{2l}^{(6)} &= (\beta_l^{(6)})^2 - 15\beta_l^{(6)} + 24 & \gamma_{1l}^{(6)} &= (\beta_l^{(6)})^2 - 18\beta_l^{(6)} + 57 \\
\gamma_{6l}^{(7)} &= (\beta_l^{(7)})^3 & \gamma_{5l}^{(7)} &= (\beta_l^{(7)})^2 (\beta_l^{(7)} - 7) \\
\gamma_{4l}^{(7)} &= (\beta_l^{(7)})^2 (\beta_l^{(7)} - 13) & \gamma_{3l}^{(7)} &= \beta_l^{(7)} ((\beta_l^{(7)})^2 - 18\beta_l^{(7)} + 35) \\
\gamma_{2l}^{(7)} &= \beta_l^{(7)} ((\beta_l^{(7)})^2 - 22\beta_l^{(7)} + 87) & \gamma_{1l}^{(7)} &= (\beta_l^{(7)})^3 - 25(\beta_l^{(7)})^2 + 141\beta_l^{(7)} - 105.
\end{aligned} \tag{F.21}$$

Następujące graniczne wartości współczynników  $\gamma_{nl}^{(\sigma)}$  uzyskujemy dla dowolnych  $\sigma$  i  $n$ :

$$\lim_{\beta_l \rightarrow \pm\infty} \gamma_{nl}^{(\sigma)} (\beta_l^{(\sigma)})^{1-r} = \lim_{\beta_l \rightarrow 0} \gamma_{nl}^{(\sigma)} (\beta_l^{(\sigma)})^{1-r} = 1. \tag{F.22}$$

Współczynniki  $\beta_k^{(\sigma)}$  i  $\gamma_{n,k}^{(\sigma)}$  w prosty sposób określają  $d_{n,k}^{(\sigma)}$  (324). Po wstawieniu (324) lub (328) do (313) i zsumowaniu wyrażeń otrzymujemy wzór ogólny (302) ze współczynnikami superpozycji  $C_n(\sigma)$  (332) słuszny dla przestrzeni  $\Psi$  o dowolnej liczbie wymiarów. W szczególności, otrzymujemy następujące fokowskie reprezentacje stanów koherentnych w przestrzeniach o wartościach  $\sigma=1,2,3,4$ :

$$|\alpha\rangle_{(1)} = \cos |\alpha| |0\rangle + e^{i\theta_0} \sin |\alpha| |1\rangle, \tag{F.23}$$

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_{(2)} &= \frac{1}{3} \left[ \cos(\sqrt{3}|\alpha|) + 2 \right] |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\theta_0} \sin(\sqrt{3}|\alpha|) |1\rangle \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{3} e^{2i\theta_0} \left[ 1 - \cos(\sqrt{3}|\alpha|) \right] |2\rangle,
\end{aligned} \tag{F.24}$$

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle_{(3)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\beta_1} \cos(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) + \frac{1}{\beta_2} \cos(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] |0\rangle \\
&+ \frac{1}{2} e^{i\theta_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \sin(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) + \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \sin(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] |1\rangle \\
&- \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{2i\theta_0} \left[ \cos(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) - \cos(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] |2\rangle \\
&- \frac{1}{2} e^{3i\theta_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \sin(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) - \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \sin(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] |3\rangle,
\end{aligned} \tag{F.25}$$

gdzie

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta_0}, \quad (\text{F.26})$$

$$\beta_{1,2} \equiv \beta_{1,2}^{(3)} = 3 \pm \sqrt{6}, \quad (\text{F.27})$$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_{(4)} &= \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \left[ \frac{\beta_1 - 7}{\beta_1} \cos(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) - \frac{\beta_2 - 7}{\beta_2} \cos(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] |0\rangle \right. \\ &+ e^{i\theta_0} \left[ \frac{\beta_1 - 7}{\sqrt{\beta_1}} \sin(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) - \frac{\beta_2 - 7}{\sqrt{\beta_2}} \sin(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] |1\rangle \\ &- e^{2i\theta_0} \left[ \frac{\beta_1 - 4}{\beta_1} \cos(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) - \frac{\beta_2 - 4}{\beta_2} \cos(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] \sqrt{2}|2\rangle \\ &- e^{3i\theta_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \sin(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) - \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \sin(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] \sqrt{3!}|3\rangle \\ &+ e^{4i\theta_0} \left[ \frac{1}{\beta_1} \cos(\sqrt{\beta_1}|\alpha|) - \frac{1}{\beta_2} \cos(\sqrt{\beta_2}|\alpha|) \right] \sqrt{4!}|4\rangle \left. \right\} \\ &+ \frac{8}{15}|0\rangle + \frac{4}{15}\sqrt{2}|2\rangle + \frac{1}{15}\sqrt{4!}|4\rangle, \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

gdzie

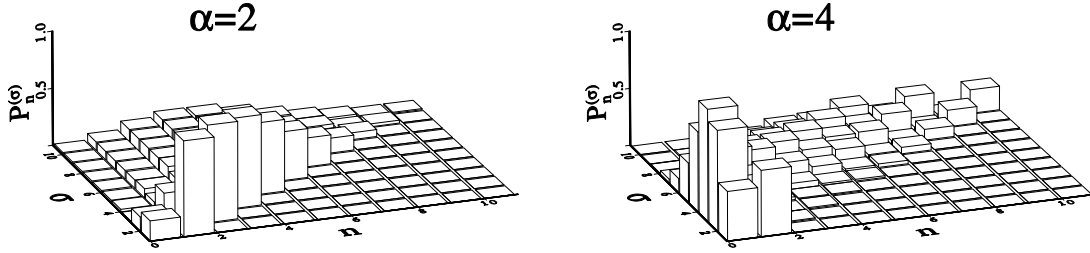
$$\beta_{1,2} \equiv \beta_{1,2}^{(4)} = 5 \pm \sqrt{10}. \quad (\text{F.29})$$

W najprostszym przypadku, stan koherentny  $|\alpha\rangle_{(1)}$  (F.23) w przestrzeni dwuwymiarowej  $\Psi = \{|0\rangle, |1\rangle\}$  został wyznaczony przez Bużka i in. [40] przy zastosowaniu metody zasadniczo równoważnej naszej procedurze. Stan (F.23) może być faktycznie utożsamiany ze stanem koherentnym SU(2) dla dwupoziomowych układów atomowych [36, 38, 310, 313, 347].

Kwadrat modułu współczynników  $C_n^{(\sigma)}$ , danych naszym analitycznym wyrażeniem (332), określa rozkład liczby fotonów  $P_n^{(\sigma)}$  w  $(\sigma + 1)$ -wymiarowej przestrzeni  $\Psi$ :

$$P_n^{(\sigma)} \equiv |\langle n|\alpha\rangle_{(\sigma)}|^2 = |C_n^{(\sigma)}|^2. \quad (\text{F.30})$$

Na rys. 41 przedstawiliśmy rozkład  $P_n^{(\sigma)}$  w przestrzeni  $\Psi$  o wartościach  $\sigma=1, \dots, 10$ . Na rys. 41a odpowiadającym  $\alpha=2$  widać, że rozkład  $P_n^{(\sigma)}$  staje się regularny („poissonowski”), gdy  $\sigma = 10$ . Jednak dla  $\alpha=4$  (rys. 41b) i  $\sigma=10$  wykres  $P_n^{(\sigma)}$  nie jest regularny i wyraźnie różni się od rozkładu poissonowskiego.



Rys. 41:

Rozkład liczby fotonów  $P_n^{(\sigma)}$  w  $(\sigma + 1)$ -wymiarowych przestrzeniach  $\Psi$  dla stanów koherentnych: **(a)**  $\alpha = 2$  i **(b)**  $\alpha = 4$ .

Do zagadnienia konstrukcji  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$  w przestrzeni  $\Psi$  można podejść w inny sposób – poprzez określenie poprawek  $|\bar{\alpha}\rangle_{(\sigma)}$  do glauberowskich stanów koherentnych „obciętych” na  $\sigma$ -tym stanie fokowskim

$$|\alpha\rangle_{(\sigma)} = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\sigma} \frac{\alpha^k}{k!} ||k\rangle - |\bar{\alpha}\rangle_{(\sigma)}, \quad (\text{F.31})$$

gdzie

$$|\bar{\alpha}\rangle_{(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\sigma} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} \bar{d}_{nk}^{(\sigma)} (-\alpha^*)^{(n-k)/2} \alpha^{(n+k)/2} ||k\rangle. \quad (\text{F.32})$$

Zachodzi następująca relacja

$$d_{nk} = d_{nk}^{(\sigma)} + \bar{d}_{nk}^{(\sigma)} \quad (\text{F.33})$$

dla przestrzeni  $\Psi$  i  $\mathcal{H}$ . Relacja (F.33) określa także prosty związek między stanami koherentnymi  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$ , a ich „dopełnieniami”  $|\bar{\alpha}\rangle_{(\sigma)}$ .

Wzór rekurencyjny dla współczynników  $\bar{d}_{nk}^{(\sigma)}$  ma postać:

$$\bar{d}_{nk}^{(\sigma)} = \bar{d}_{n-1,k-1}^{(\sigma)} + (k+1)\bar{d}_{n-1,k+1}^{(\sigma)} \quad (\text{F.34})$$

z warunkami brzegowymi

$$\bar{d}_{00}^{(\sigma)} = \bar{d}_{00}^{(\sigma)} = 0, \quad (\text{F.35a})$$

$$\forall_n \forall_{k>\sigma} \bar{d}_{nk}^{(\sigma)} = d_{nk}. \quad (\text{F.35b})$$

Z powyższych wzorów dla  $n, k = 0, \dots, \sigma$  otrzymujemy

$$\bar{d}_{n,2\sigma-n}^{(\sigma)} = 0. \quad (\text{F.36})$$

Wzory rekurencyjne (F.34) i (F.35a-b) dla  $\bar{d}_{nk}^{(\sigma)}$  różnią się od relacji (317) i (318a-c) dla  $d_{nk}^{(\sigma)}$  jedynie warunkami brzegowymi.

Relacja (313) umożliwia uzyskanie prostych wzorów przybliżonych, np.:

$$\begin{aligned} |\alpha I\rangle_{(\sigma)} &= \sum_{n=0}^{\sigma} \frac{\hat{T}^n}{n!} |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\sigma} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{n!} d_{n,n-2k} (-\alpha^*)^k \alpha^{n-k} ||n-2k\rangle, \end{aligned} \quad (\text{F.37})$$

$$|\alpha II\rangle_{(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\sigma} \sum_{n=k}^{2\sigma-k} \frac{1}{n!} d_{nk} (-\alpha^*)^{(n-k)/2} \alpha^{(n+k)/2} ||k\rangle, \quad (\text{F.38})$$

$$\begin{aligned} |\alpha III\rangle_{(\sigma)} &= \sum_{k=0}^{\sigma} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} d_{nk} (-\alpha^*)^{(n-k)/2} \alpha^{(n+k)/2} ||k\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\sigma} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

Wzór (F.39) uzyskuje się poprzez rzutowanie glauberowskich stanów koherentnych na  $(\sigma+1)$  stanów fokowskich. Tę definicję stanów koherentnych w  $\Psi$  przyjmowali Barnett i Pegg [348] i ich następcy, np. [260, 262, 197]. Oczywiście, stany (F.37)–(F.39) nie są unormowane. Jako, że są spełnione następujące własności

$$\forall_{|n\rangle} \quad \frac{\langle n|\alpha I\rangle_{(\sigma)}}{\langle n|\alpha\rangle_{(\sigma)}} \leq \frac{\langle n|\alpha II\rangle_{(\sigma)}}{\langle n|\alpha\rangle_{(\sigma)}} \leq 1 \leq \frac{\langle n|\alpha III\rangle_{(\sigma)}}{\langle n|\alpha\rangle_{(\sigma)}} \quad (\text{F.40})$$

(przy  $\langle n|\alpha\rangle_{(\sigma)} \neq 0$ ) oraz

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |\alpha I\rangle_{(\sigma)} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} |\alpha II\rangle_{(\sigma)} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} |\alpha III\rangle_{(\sigma)} = |\alpha\rangle \quad (\text{F.41})$$

to zachodzi

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |\alpha\rangle_{(\sigma)} = |\alpha\rangle. \quad (\text{F.42})$$

Z drugiej strony na mocy samej konstrukcji współczynników  $d_{n,k}^{(\sigma)}$  i  $\bar{d}_{n,k}^{(\sigma)}$  otrzymujemy w granicy

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} d_{nk}^{(\sigma)} = d_{nk}^{(\infty)} = d_{nk} \quad (\text{F.43})$$

i/lub

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{d}_{nk}^{(\sigma)} = 0, \quad (\text{F.44})$$

co oznacza spełnienie warunku (F.42).

Na zakończenie pragniemy zwrócić uwagę na wyniki otrzymane przez Figurnego, Orłowskiego i Wódkiewicza. W artykule [346] znaleziono m. in. wartości i stany własne operatora kwadraturowego

$$\hat{X}_{FOW} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^+) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sqrt{\sigma-1} & 0 & \sqrt{\sigma} \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\sigma} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{F.45})$$

Oczywiście, (F.45) jest szczególnym przypadkiem analizowanego przez nas operatora  $\hat{T}$  (307):

$$\hat{X}_{FOW} = \frac{i}{2} \hat{T}(\alpha = -i). \quad (\text{F.46})$$

Wartości własne  $\gamma_k$  operatora  $\hat{X}_{FOW}$  są pierwiastkami wielomianu Hermite'a  $H_{\sigma+1}(\gamma_k \sqrt{2})$  [346]. W naszej konstrukcji stanów koherentnych  $|\alpha\rangle_{(\sigma)}$ , współczynniki  $x_k$  (326) i  $\beta_k$  (325) są również pierwiastkami wielomianów Hermite'a, co bezpośrednio wynika z relacji (F.46).

## Uzupełnienie G.

### Sparametryzowany rozkład fazowy $P^{(1)}(\theta)$ dla stanów koherentnych

Pokażemy, że nasze ogólne relacje (391)–(396) są słuszne także w przypadku granicznym, gdy  $s \rightarrow 1$ . Odpowiada to sytuacji, gdy współczynnik  $G^{(s)}(m, n)$  (392) dąży do nieskończoności. Ograniczymy nasze rozważania do stanów koherentnych, dla których elementy macierzowe  $\rho_{mn}$  są równe (395). W tym przypadku, rozkład fazowy  $P^{(s)}(\theta)$  można zapisać w postaci (396), gdzie współczynniki  $a_m^{(s)}$  dane są wzorem (397) oraz

$$|\rho_{m+n,n}| = \exp(-|\alpha_0|^2) \frac{|\alpha_0|^{m+2n}}{\sqrt{(m+n)!n!}}, \quad (\text{G.1})$$

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta}, \quad \alpha_0 = |\alpha_0|e^{i\theta_0}. \quad (\text{G.2})$$

Skorzystamy ze wzoru (394) określającego współczynniki  $G^{(s)}(m, n)$  poprzez hipergeometryczną funkcję Gaussa  ${}_2F_1$ . Zamiast parametru  $s$  dogodnie jest stosować parametr  $x$  zdefiniowany jako:

$$x = \frac{2}{1-s} \quad (\text{G.3})$$

Gdy  $s \rightarrow 1$  to  $x$  zmierza do nieskończoności. Jeśli wykorzystać następujące własności funkcji  ${}_2F_1$  [129]:

$${}_2F_1(a, b, c, \frac{x}{x-1}) = (1-x)^a {}_2F_1(a, c-b, c, x), \quad (\text{G.4})$$

$${}_2F_1(a, b, c, x) = {}_2F_1(b, a, c, x), \quad (\text{G.5})$$

to wzór (394) można zapisać w postaci

$$G^{(s)}(m+n, n) = x^{(m/2)} \sqrt{\frac{(m+n)!}{n!}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{m!} f_m. \quad (\text{G.6})$$

Dla prostoty zapisu, przez  $f_m$  oznaczyliśmy funkcję hipergeometryczną o szczególnych argumentach:

$$f_m \equiv {}_2F_1(m/2, -n, m+1, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(\frac{m}{2})_k}{(m+1)_k} (-x)^k. \quad (\text{G.7})$$

Współczynniki  $a^{(1)}(m, n)$  przyjmują wówczas postać

$$\begin{aligned} a_m^{(1)} &= \lim_{s \rightarrow 1} \exp(-|\alpha_0|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_0|^{m+2n}}{\sqrt{(m+n)!n!}} G^{(s)}(m+n, n) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-|\alpha_0|^2) \frac{|\alpha_0|^m}{m!} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) x^{(m/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha_0|^2)^n}{n!} f_m. \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Założmy, że  $m$  jest parzyste. Istotą problemu jest obliczenie sumy w drugim ze wzorów (G.8). W tym celu wyznaczyliśmy nową reprezentację funkcji hipergeometrycznej  $f_m$ :

$$f_m = 2(m-1)! \sum_{l=0}^{M-1} (-1)^{M-l+1} \frac{(M-l)_M}{l!} x^{-m+l} S_{m-l}(-x), \quad (\text{G.9})$$

określoną poprzez skończone sumy

$$S_l(x) \equiv \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+l}}{(k+l)_l}, \quad (\text{G.10})$$

gdzie  $M = \frac{m}{2}$ . We wzorze (G.9) przez  $(n+l)_l$  oznaczyliśmy wielomiany Pochhammera. Nasza reprezentacja (G.9) funkcji hipergeometrycznej  $f_m$  ma tę zaletę, że  $n$  występuje tylko w sumach (G.10). Dzięki pewnej symetrii (G.10) udało się nam znaleźć ogólne wyrażenie na  $S_l$ :

$$\begin{aligned} S_l(x) &= \frac{(x+1)^{n+l} - 1}{(n+1) \cdots (n+l)} - \left( \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} \frac{1}{n+1} + \frac{x^{l-2}}{(l-2)!} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{x}{(n+1) \cdots (n+l-1)} \right) \\ &= \frac{(x+1)^{n+l}}{(n+1)_l} - \sum_{i=0}^{l-1} \prod_{j=1}^{l-i} \frac{x^i}{i!} (n+j)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

W szczególnym przypadku mamy

$$S_0(x) = (1+x)^n. \quad (\text{G.12})$$

Wzór (G.11) redukuje się także do wzoru (0.153.3) w [129]. Z uwagi na sumowanie w (G.8) przebiegające po  $n$  od 0 do nieskończoności, wzór (G.11) ma postać o wiele dogodniejszą niż (G.10). Aby wyliczyć sumę w (G.8), należy skorzystać z (G.9) i (G.11) oraz relacji (np. [315]):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+k}}{(n+k)!} &= e^y - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{y^n}{n!} \\ &= e^y \left[ 1 - \frac{\Gamma(k, y)}{\Gamma(k)} \right], \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

gdzie  $\Gamma(k, y)$  jest niezupełną funkcją gamma. Skomplikowane wyrażenia sumują się do zera za wyjątkiem składników sum o wskaźnikach  $m, l, i$  spełniających warunek

$$l + i = \frac{m}{2}. \quad (\text{G.14})$$

Stąd wynika, że współczynniki  $a_m^{(1)}$  o parzystych wskaźnikach  $m$  są równe jedności. Niestety nie udało się nam analitycznie udowodnić podobnej relacji dla  $a_{2m+1}^{(1)}$ . Można numerycznie pokazać, że (G.8) dąży do jedności dla  $a_{2m+1}^{(1)}$ . Zatem wnioskujemy, że dla stanów koherentnych zachodzi

$$\bigwedge_m a_m^{(1)} = 1. \quad (\text{G.15})$$

Zauważamy, że wyrażenie (396) ze współczynnikami  $a_m^{(1)}$  (G.15) jest reprezentacją funkcji delta Diraca [134]. Zatem ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\theta - \theta_0)] \right\} \\ &= \delta(\theta - \theta_0). \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

Całkowania rozkładu *quasi*-prawdopodobieństwa  $\mathcal{W}^{(1)}(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_0)$  (funkcji  $P$ ) może bezpośrednio doprowadzić nas do tego samego wzoru (G.16) na marginalną funkcję  $P, P^{(1)}(\theta)$ , mianowicie:

$$P^{(1)}(\theta) = \int_0^{\infty} \delta(\alpha - \alpha_0) |\alpha| d|\alpha| = \delta(\theta - \theta_0). \quad (\text{G.17})$$

Jak widać, różne metody prowadzą do tego samego wyniku (G.16), co jest kolejnym potwierdzeniem, że nasze ogólne wzory (391)–(397) są słuszne dla dowolnego parametru  $s$  ( $s \in \langle -1, 1 \rangle$ ), nawet dla granicznej wartości  $s = 1$ .



## Uzupełnienie H.

### Dyfuzja fazy w modelu tłumionego oscylatora anharmonicznego

Ewolucję fazy w modelu tłumionego oscylatora opisanego hamiltonianami (440a-d) z operatorem termostatu (441) przedstawimy w podobny sposób, jak to uczyniliśmy dla modelu wzmacnianego oscylatora anharmonicznego (440a-d) z operatorem termostatu (442).

Równanie fundamentalne wyprowadzili Peřinova i Lukš [181] oraz Daniel i Milburn [179]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i\kappa(\hat{a}^{+2}\hat{a}^2\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{+2}\hat{a}^2) + \frac{1}{2}\gamma(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a}) \\ & + \gamma\langle \hat{n}_V \rangle (\hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a} + \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^+), \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

gdzie przyjęliśmy te same oznaczenia jak w równaniu (443). W szczególnym przypadku, gdy  $\langle \hat{n}_V \rangle = 0$ , równanie (H.1) upraszcza się do wzoru Milburna i Holmes [343]. Równanie Fokkera-Plancka dla  $s$ -sparametryzowanych rozkładów *quasi*-prawdopodobieństwa ma postać [181]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha) = & \left\{ -i\kappa \left[ 2(1-s) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - 2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha |\alpha|^2 + s \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \alpha^2 \right. \right. \\ & + \left. \frac{1-s^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \alpha^*} \alpha - \text{c.c.} \right] + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) \\ & \left. + \gamma \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1-s}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right\} \mathcal{W}^{(s)}(\alpha), \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

które w szczególnym przypadku przyjmuje postać FPE dla funkcji  $Q$  [179, 343]. Po zamianie  $\alpha$  na zmienne biegunowe  $(r, \theta)$  otrzymujemy FPE (H.2) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}^{(s)}(r, \theta) = & \left\{ 2\kappa \left( r^2 - 1 - \frac{s}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \kappa \left( s + \frac{1-s^2}{8r^2} r \frac{\partial}{\partial r} \right) r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\ & + \frac{\gamma}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 + \frac{\gamma}{4r^2} \left( \langle \hat{n}_V \rangle + \frac{1-s}{2} \right) \left( r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\ & \left. - \frac{\kappa}{8} \frac{1-s^2}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\} \mathcal{W}^{(s)}(r, \theta). \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

Zatem przy założeniu  $r^{-2} \approx \langle \hat{n} \rangle^{-1}$ , sparametryzowany współczynnik dyfuzji związany z dyfuzją fazy ma postać :

$$D_{\theta}^{(s)} = \frac{\gamma}{8\langle \hat{n} \rangle} (2\langle \hat{n}_V \rangle + 1 - s). \quad (\text{H.4})$$

Z drugiej strony, tak jak w §7.4, równanie podstawowe zapiszemy w reprezentacji fokowskiej

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{mn} &= -i\kappa [m(m-1) - n(n-1)] \rho_{mn} \\ &+ \frac{\gamma}{2} \left[ 2\sqrt{(m+1)(n+1)} \rho_{m+1,n+1} - (m+n) \rho_{mn} \right] + \gamma \langle \hat{n}_V \rangle \\ &\times \left[ \sqrt{mn} \rho_{m-1,n-1} + \sqrt{(m+1)(n+1)} \rho_{m+1,n+1} - (m+n+1) \rho_{mn} \right], \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

co prowadzi nas do równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\theta) &= -i\kappa \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \rho_{mn} \exp[-i(m-n)\theta] (m-n)(m+n-1) \\ &- \frac{\gamma}{2} \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \rho_{mn} \exp[-i(m-n)\theta] (\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 \\ &- \frac{\gamma}{2} \langle \hat{n}_V \rangle \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \rho_{mn} \exp[-i(m-n)\theta] \\ &\times \left[ (\sqrt{m+1} - \sqrt{n+1})^2 + (\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Pojawia się problem faktoryzacji fluktuacji fazowych i amplitudowych, podobnie jak w modelu wzmacnianego oscylatora anharmonicznego. Po zastosowaniu przybliżenia (448a-b) otrzymujemy równanie ruchu dla rozkładu fazowego  $P(\theta)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\theta) = \left\{ 2\kappa \langle \hat{n} \rangle \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\gamma}{8} \frac{2\langle \hat{n}_V \rangle + 1}{\langle \hat{n} \rangle} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} P(\theta), \quad (\text{H.7})$$

którego współczynnik dyfuzji

$$D_{\theta}^{(\text{PB})} = \frac{\gamma}{8\langle \hat{n} \rangle} (2\langle \hat{n}_V \rangle + 1) \quad (\text{H.8})$$

jest równy współczynnikowi dyfuzji fazowej  $D_{\theta}^{(0)}$  (H.4) w równaniu Fokkera-Plancka dla funkcji Wignera. Do tego samego wniosku doszliśmy analizując oscylator tłumiony w §7.2.

Rozwiązania równania Fokkera-Plancka (H.2) dla funkcji  $Q$  i równania fundamentalnego (H.5) w reprezentacji fokowskiej  $\rho_{mn}(t)$  są dobrze znane zarówno przy określonych warunkach początkowych [343, 181, 179, 184], jak również w sytuacji ogólnej dla dowolnych pól początkowych [182]. Znajomość elementów macierzowych  $\rho_{mn}(t)$  pozwala zbadać dowolne własności światła. Niektóre własności fazowe tłumionego oscylatora anharmonicznego studiowali Gantsog i Tanaś [196]. Znając  $\rho_{mn}(t)$  można też w szczególności wyznaczyć i porównać wielorakie rozkłady, np.  $\mathcal{W}^{(s)}(\alpha)$  (na mocy wzorów z rozdziału 1),  $P^{(s)}(\theta)$  (§7.1) i  $P(\theta)$  (§5.1). Jednak z uwagi na skomplikowaną strukturę tych rozwiązań bezpośrednio analityczne porównanie nie jest możliwe. Metoda Barnetta i in. [342] umożliwia proste analityczne porównanie równań ruchu dla rozkładów fazowych i *quasi*-prawdopodobieństwa, w szczególności porównanie własności dyfuzji fazy opisanej przez te rozkłady.

## Literatura

- [1] E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [2] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [3] R. J. Glauber, Phys. Rev. **A131**, 2766 (1963).
- [4] R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963).
- [5] K. E. Cahill, Phys. Rev. **138**, B1566 (1965).
- [6] J. R. Klauder, J. McKenna i D. G. Currie, J. Math. Phys. **6**, 743 (1965).
- [7] G. S. Agarwal i E. Wolf, Phys. Lett. **26A**, 485 (1968).
- [8] K. E. Cahill i R. J. Glauber, Phys. Rev. **177**, 1857, 1882 (1969).
- [9] P. D. Drummond i C. W. Gardiner, J. Phys. **A13**, 2353 (1980).
- [10] V. I. Tatarsky, Uspekhi Fiz. Nauk **139**, 587 (1983).
- [11] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully i E. P. Wigner, Phys. Rep. **106**, 121 (1984).
- [12] N. Lu, S. -Y. Zhu i G. S. Agarwal, Phys. Rev. **A40**, 258 (1989).
- [13] G. J. Milburn i D. F. Walls, *Quasiprobability distributions in quantum optics*, w: THE CONCEPT OF PROBABILITY, red. E. I. Bitsakis i C. A. Nicolaides, Kluwer Acad. Pub., 1989, str. 289–299.
- [14] K. Vogel i H. Risken, Phys. Rev. **A39**, 4675 (1989).
- [15] A. Wünsche, Quantum Opt. **3**, 359 (1991).
- [16] S. L. Braunstein, C. M. Caves i G. J. Milburn, Phys. Rev. **A43**, 1153 (1991).
- [17] H. Moya-Cessa i P. Knight, Phys. Rev. A **48**, 2479 (1993).

- [18] J. R. Klauder i E. C. G. Sudarshan, FUNDAMENTALS OF QUANTUM OPTICS, Benjamin, New York, 1968.
- [19] W. H. Louisell, QUANTUM STATISTICAL PROPERTIES OF RADIATION, J. Wiley and Sons, New York, 1973.
- [20] H. Risken, THE FOKKER-PLANCK EQUATION, Springer, Berlin, 1984.
- [21] C. W. Gardiner, HANDBOOK OF STOCHASTIC METHODS, Springer Series in Synergetics, red. H. Haken, Springer, Berlin **13**, 1984.
- [22] C. W. Gardiner, QUANTUM NOISE, Springer Series in Synergetics, red. H. Haken, Springer, Berlin **56**, 1991.
- [23] I. Białyński-Birula, M. Cieplak i J. Kamiński, TEORIA KWANTÓW, PWN, Warszawa, 1991; THEORY OF QUANTA, University Press, Oxford, 1992.
- [24] J. Peřina, QUANTUM STATISTICS OF LINEAR AND NONLINEAR OPTICAL PHENOMENA, Reidel, Dordrecht, 1984 (wydanie drugie poprawione i rozszerzone, 1991).
- [25] R. Tanaś, **A. Miranowicz** i S. Kielich, *Squeezing and its graphical representations in the anharmonic oscillator model*, Phys. Rev. **A43**, 4014 (1991).
- [26] K. Husimi, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **22**, 264 (1940).
- [27] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).
- [28] U. M. Titulaer i R. J. Glauber, Phys. Rev. **140**, B676 (1965).
- [29] R. Loudon i P. L. Knight, J. Mod. Opt. **34**, 709 (1987).
- [30] M. Hillery, Phys. Rev. **A35**, 725 (1987).
- [31] S. Stenholm, Eur. J. Phys. **1**, 244 (1980).
- [32] S. J. Carter i P. D. Drummond, Phys. Rev. Lett. **67**, 3757 (1991).

- [33] N. R. Davis i C. D. Cantrell, *J. Opt. Am. Soc.* **B6**, 74 (1989).
- [34] R. Schack i A. Schenzle, *Phys. Rev.* **A44**, 682 (1991).
- [35] E. Schrödinger, *Naturwiss.* **14**, 664 (1926).
- [36] C. Aragone, E. Chalbaud i S. Salamo, *J. Math. Phys.* **17**, 1963 (1976).
- [37] R. Gilmore, *Rev. Mev. de Fisica* **23**, 142 (1974).
- [38] A. M. Perelomov, *GENERALIZED COHERENT STATES AND SOME OF THEIR APPLICATIONS*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [39] Wei-Min Zhang, D. H. Feng i R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 867 (1990).
- [40] V. Bužek, A. D. Wilson-Gordon, P. L. Knight i W. K. Lai, *Phys. Rev.* **A45**, 8079 (1992).
- [41] C. M. Caves, *Phys. Rev.* **D23**, 1693 (1981).
- [42] M. C. Teich i B. E. A. Saleh, *Quantum Opt.* **1**, 153 (1989).
- [43] K. Zaheer i M. S. Zubairy, w: *ADVANCES IN ATOMIC, MOLECULAR AND OPTICAL PHYSICS*, red. D. Bates i B. Bederson, Academic Press, New York **28**, 143 (1990).
- [44] D. Stoler, *Phys. Rev.* **D1**, 3217 (1970).
- [45] H. P. Yuen, *Phys. Rev.* **A13**, 2226 (1976).
- [46] A. Orłowski, *Phys. Lett.* **A154**, 319 (1991).
- [47] R. Tanaś, B. K. Murzakhmetov, Ts. Gantsog i A. V. Chizhov, *Quantum Opt.* **4**, 1 (1992).
- [48] Hu Zheng-Feng, *J. Mod. Opt.* **39**, 1381 (1992).

- [49] R. Tanaś, **A. Miranowicz** i Ts. Gantsog, *Phase distributions of real field states*, w: QUANTUM PHASE AND PHASE DEPENDENT MEASUREMENTS, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne Physica Scripta T**48**, 53 (1993).
- [50] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight i V. Bužek, Phys. Rev. A **41**, 2645 (1990).
- [51] R. Tanaś i S. Kielich, Opt. Commun. **45**, 351 (1983).
- [52] R. Tanaś i S. Kielich, Optica Acta **31**, 81 (1984).
- [53] R. Tanaś, Phys. Lett. A**141**, 217 (1989).
- [54] **A. Miranowicz**, R. Tanaś i S. Kielich, *Generation of discrete superpositions of coherent states in the anharmonic oscillator model*, Quantum Opt. **2**, 253 (1990).
- [55] M. Kitagawa i Y. Yamamoto, Phys. Rev. A**34**, 3974 (1986).
- [56] Z. Białynicka-Birula, Phys. Rev. **173**, 1207 (1968).
- [57] D. Stoler, Phys. Rev. D**4**, 2309 (1971).
- [58] B. Yurke i D. Stoler, Phys. Rev. Lett. **57**, 13 (1986).
- [59] P. Tombesi i A. Mecozzi, J. Opt. Soc. Am. B**4**, 1700 (1987).
- [60] R. Tanaś, Ts. Gantsog, **A. Miranowicz** i S. Kielich, *Quasi-probability distribution  $Q(\alpha, \alpha^*)$  versus phase distribution  $P(\theta)$  in a description of superpositions of coherent states*, J. Opt. Soc. Am. B**8**, 1576 (1991).
- [61] G. J. Milburn, Phys. Rev. A**33**, 674 (1986).
- [62] W. I. Smirnow, MATEMATYKA WYŻSZA, t. 3, cz. 2, PWN, Warszawa, 1965, str. 268.
- [63] H. J. Yoo, J. J. Sanchez-Mondragon i J. H. Eberly, J. Phys. A**14**, 1383 (1981).

- [64] **A. Miranowicz** i S. Kielich, *Quantum-statistical theory of Raman scattering processes*, w: MODERN NONLINEAR OPTICS, *Advances in Chemical Physics Series*, t. **85**, część 3, red. M. W. Evans i S. Kielich, J. Wiley and Sons Pub., New York, 1993, str. 531–626.
- [65] M. Dębska-Kotłowska i **A. Miranowicz**, *Spectral analysis of light scattered by monodisperse solutions of rigid, anisotropic macromolecules in a reorienting ac electric field*, w: MODERN NONLINEAR OPTICS, *Advances in Chemical Physics Series*, t. **85**, część 1, red. M. W. Evans i S. Kielich, J. Wiley and Sons Pub., New York, 1993, str. 51–68.
- [66] M. Dębska-Kotłowska i **A. Miranowicz**, *Spectral analysis of light scattered on macromolecules reoriented by laser beam*, artykuł wysłany do J. Polymer Sci. (1994).
- [67] M. Dębska-Kotłowska i **A. Miranowicz**, *On the influence of size and shape of macromolecules on spectra of Rayleigh light scattering in external laser field*, artykuł wysłany do Chem. Phys. Lett. (1994).
- [68] N. Bloembergen, Am. J. Phys. **35**, 989 (1967).
- [69] S. Kielich, Progress in Optics, red. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, **20**, 156 (1983).
- [70] S. Kielich, Proc. Indian Acad. Sci. (Chem. Sci. ) **94**, 403 (1985).
- [71] S. Kielich, MOLEKULARNA OPTYKA NIELINIOWA, PWN, Warszawa, 1977; Nauka, Moskwa, 1981.
- [72] Y. R. Shen, NONLINEAR OPTICS, J. Wiley and Sons, New York, 1984, Chapt. 10.
- [73] M. G. Raymer i I. A. Walmsley, Progress in Optics, red. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, **28**, 182 (1990).



- [74] J. Mostowski i M. G. Raymer, *Quantum Statistics in Nonlinear Optics*, w: CONTEMPORARY NONLINEAR OPTICS, red. G. P. Agrawal i W. Boyd, Academic Press, Boston, 1992, str. 187.
- [75] W. Kaiser i M. Maier, *Stimulated Rayleigh, Brillouin and Raman Scattering*, w: LASER HANDBOOK, red. F. T. Arecchi i E. O. Schultz-Dubois, North-Holland, Amsterdam, 1972, str. 1077.
- [76] J. A. Koningstein, INTRODUCTION TO THE THEORY OF THE RAMAN EFFECT, Reidel, Dordrecht, 1972.
- [77] A. Z. Grasyuk, *Kvantovaya Elektronika* **1**, 485 (1974) [*Sov. J. Quantum Electronics* **4**, 269 (1974)].
- [78] A. Z. Grasyuk, *Generation and Amplification of Light by Stimulated Scattering*, w: LASERS AND THEIR APPLICATIONS, red. N. G. Basov, Proc. of the Lebedev Physics Institute, t. 76, Nauka, Moscow, 1976.
- [79] C. S. Wang, *The Stimulated Raman Process* w: QUANTUM ELECTRONICS: A TREATISE, t. I Part A, Chapt. 7, red. H. Rabin i C. L. Tang, Academic Press, New York, 1975, str. 447.
- [80] C. S. Wang, *Phys. Rev.* **182**, 482 (1969).
- [81] LIGHT SCATTERING IN SOLIDS, *Topics Appl. Phys.*, red. M. Cardona, t. 8, Springer, Berlin, 1975.
- [82] D. A. Long, RAMAN SPECTROSCOPY, McGraw-Hill, New York, 1977.
- [83] W. Hayes i R. Loudon, SCATTERING OF LIGHT BY CRYSTALS, J. Wiley and Sons, New York, 1978.
- [84] A. Penzkofer, A. Laubereau i W. Kaiser, *Progress in Quantum Electronics* **6**, 55 (1979).

- [85] Yu. E. D'yakov i S. Yu. Nikitin, *Kvantovaya Elektronika* **14**, 1925 (1987) [Sov. J. Quantum Electronics **17**, 1227 (1987)].
- [86] Y. R. Shen, *Phys. Rev.* **155**, 921 (1967).
- [87] D. F. Walls, *J. Phys.* **A6**, 496 (1973).
- [88] K. J. McNeil i D. F. Walls, *J. Phys.* **A7**, 617 (1974).
- [89] H. D. Simaan, *J. Phys.* **A8**, 1620 (1975).
- [90] A. Schenzle i H. Brand, *Phys. Rev.* **A20**, 1628 (1979).
- [91] J. Peřina, *Optica Acta* **28**, 325 (1981).
- [92] J. Peřina, *Optica Acta* **28**, 1529 (1981).
- [93] K. Germey, F. -J. Schütte i R. Tiebel, *Ann. Physik (Leipzig)* **38**, 80 (1981).
- [94] P. S. Gupta i J. Dash, *Indian J. Pure and Appl. Phys.* **29**, 606 (1991).
- [95] N. N. Bogolubov Jr., A. S. Shumovsky i T. Quang, *Physica* **144A**, 503 (1987).
- [96] K. Grygiel, *Kwantowa teoria wymuszonych procesów ramanowskich*, rozprawa doktorska, Uniwersytet im. A. Mickiewicza, 1987.
- [97] M. Kárská i J. Peřina, *J. Mod. Opt.* **37**, 195 (1990).
- [98] J. Peřina, *Acta Phys. Polonica* **A78**, 173 (1990).
- [99] T. von Foerster i R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **A3**, 1484 (1971).
- [100] Ch. Kittel, *QUANTUM THEORY OF SOLIDS*, J. Wiley and Sons, New York, 1963.
- [101] R. H. Pantell i H. E. Puthoff, *FUNDAMENTALS OF QUANTUM ELECTRONICS*, J. Wiley and Sons, New York, 1969.
- [102] P. Szlachetka, *Quantum Fluctuations in Multi-Photon Raman Scattering Processes*, rozprawa doktorska, Uniwersytet im. A. Mickiewicza, 1980.

- [103] J. Tucker i D. F. Walls, Phys. Rev. **178**, 2036 (1969).
- [104] D. F. Walls, Z. Physik **237**, 224 (1970).
- [105] P. Szlachetka, S. Kielich, J. Peřina i V. Peřinová, J. Phys. **A12**, 1921 (1979).
- [106] M. D. Levenson, M. J. Holland, D. F. Walls, P. J. Manson, P. T. H. Fisk i H. A. Bachor, Phys. Rev. **A44**, 2023 (1991).
- [107] G. S. Agarwal, Progress in Optics, red. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, **11**, 1 (1973).
- [108] H. Haken, HANDBUCH DER PHYSIK, **25/2c**, Springer, Berlin, 1970.
- [109] G. E. Uhlenbeck i L. S. Ornstein, Phys. Rev. **36**, 823 (1930).
- [110] R. Loudon, THE QUANTUM THEORY OF LIGHT, University Press, Oxford, 1973 (wydanie drugie rozszerzone, 1983).
- [111] H. D. Simaan, J. Phys. **A11**, 799 (1978).
- [112] P. S. Gupta i B. K. Mohanty, Czech. J. Phys. **B30**, 1127 (1980).
- [113] B. K. Mohanty i P. S. Gupta, Czech. J. Phys. **B31**, 275 (1981).
- [114] B. K. Mohanty, N. Nayak i P. S. Gupta, Optica Acta **29**, 1017 (1982).
- [115] P. S. Gupta i J. Dash, Czech. J. Phys. **40**, 432 (1990).
- [116] P. S. Gupta i J. Dash, Opt. Commun. **88**, 273 (1992).
- [117] Yu. P. Malakyan, Opt. Commun. **78**, 67 (1990).
- [118] Yu. P. Malakyan, J. Mod. Opt. **39**, 509 (1992).
- [119] P. L. Knight, Phys. Scr. **T12**, 51 (1986).
- [120] S. J. D. Phoenix i P. L. Knight, J. Opt. Soc. Am. **B7**, 116 (1990).
- [121] R. R. Puri i G. S. Agarwal, Phys. Rev. **A45**, 5073 (1992).

- [122] C. C. Gerry i J. H. Eberly, Phys. Rev. **A42**, 6805 (1990).
- [123] M. Smoluchowski, Ann. Phys. **25**, 332 (1908).
- [124] K. Vogel i H. Risken, Phys. Rev. **A38**, 2409 (1988).
- [125] Ning-Lu, Shi-Yao Zhu i G. S. Agarwal, Phys. Rev. **A40**, 258 (1989).
- [126] V. Peřinová, J. Křepelka i J. Peřina, Optica Acta **33**, 1263 (1986).
- [127] V. Peřinová i J. Peřina, Optica Acta **28**, 769 (1981).
- [128] V. Peřinová, Optica Acta **28**, 747 (1981).
- [129] I. C. Gradsztejn i I. M. Ryżyk, TABLICE INTEGRALÓW, SUM, RIADÓW I PRO-  
IZWIEDIENIJ, Nauka, Moskwa, 1971.
- [130] A. P. Prudnikow, J. A. Bryczkow i O. I. Maryczew, INTEGRALY I RIADY: SPE-  
CJALNYJE FUNKCJI, Nauka, Moskwa, 1983.
- [131] M. O. Scully i W. E. Lamb, Phys. Rev. **159**, 208 (1967).
- [132] D. T. Pegg i S. M. Barnett, Phys. Rev. **A39**, 1665 (1989).
- [133] Ts. Gantsog, **A. Miranowicz** i R. Tanaś, *Phase properties of real field states: The  
Garrison-Wong versus Pegg-Barnett predictions*, Phys. Rev. **A46**, 2870 (1992).
- [134] J. Antoniewicz, TABLICE FUNKCJI DLA INŻYNIERÓW, PWN, Warszawa, 1967.
- [135] V. Peřinová, A. Lukš i P. Szlachetka, J. Mod. Opt. **36**, 1435 (1989).
- [136] G. Lachs, Phys. Rev. **138**, B1012 (1965).
- [137] B. R. Mollow i R. J. Glauber, Phys. Rev. **A160**, 1076, 1097 (1967).
- [138] C. M. Caves i B. L. Schumaker, Phys. Rev. **A31**, 3068 (1985).
- [139] B. L. Schumaker i C. M. Caves, Phys. Rev. **A31**, 3093 (1985).
- [140] S. Kielich, M. Kozierowski i R. Tanaś, Optica Acta **32**, 1023 (1985).

- [141] G. Leuchs, *Photon Statistics, Antibunching and Squeezed States*, w: FRONTIERS OF NONEQUILIBRIUM STATISTICAL PHYSICS, red. G. T. Moore i M. O. Scully, Plenum, New York, 1986.
- [142] K. Wódkiewicz, *J. Mod. Opt.* **34**, 941 (1987).
- [143] M. C. Teich i B. E. A. Saleh, *Progress in Optics*, red. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, **26**, 1 (1988).
- [144] J. Grochmalicki i M. Lewenstein, *Phys. Rep.* **208**, 189 (1991).
- [145] SQUEEZED STATES OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD, red. H. J. Kimble i D. F. Walls, wydanie specjalne *J. Opt. Soc. Am. B4*, No. 10 (1987).
- [146] SQUEEZED LIGHT, red. R. Loudon i P. L. Knight, wydanie specjalne *J. Mod. Opt.* **34**, No. 6/7 (1987).
- [147] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz i J. F. Valley, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409 (1985).
- [148] R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmutter, R. G. de Voe i D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 691 (1986).
- [149] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall i H. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2520 (1986).
- [150] M. G. Raitzen, L. A. Orozco, M. Xiao, T. L. Boud i H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 198 (1987).
- [151] M. W. Maeda, P. Kumar i J. H. Shapiro, *Opt. Lett.* **12**, 161 (1987).
- [152] A. Heidemann, R. J. Horowicz, S. Reynand, E. Giacobino i C. Fabre, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2555 (1987).
- [153] T. Debuisschert, S. Reynaud, A. Heidemann, E. Giacobino i C. Fabre, *Quantum Opt.* **1**, 3 (1989).
- [154] P. Kumar, O. Aytür i J. Huang, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1015 (1990).

- [155] D. M. Hope, H. -A. Bachor, P. J. Manson i D. E. McClelland, Phys. Rev. **A46**, R1181 (1992).
- [156] E. S. Polzik, J. Carri i H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **68**, 3020 (1992).
- [157] R. Short i L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **51**, 384 (1983).
- [158] R. Short i L. Mandel, w: COHERENCE AND QUANTUM OPTICS V, red. L. Mandel i E. Wolf, Plenum, New York, 1984, str. 671.
- [159] S. Machida, Y. Yamamoto i Y. Itaya, Phys. Rev. Lett. **58**, 1000 (1987).
- [160] S. Machida i Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **60**, 792 (1988).
- [161] J. Mertz, A. Heidemann, C. Fabre, E. Giacobino i S. Reynaud, Phys. Rev. Lett. **64**, 2897 (1990).
- [162] B. G. Oldaker, P. J. Martin, P. L. Gould, M. Xiao i D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **65**, 1555 (1990).
- [163] W. H. Richardson i Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **66**, 1963 (1991).
- [164] W. H. Richardson, S. Machida i Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **66**, 2867 (1991).
- [165] G. S. Agarwal i S. Jha, Z. Physik **B35**, 391 (1979).
- [166] T. V. Trung i F. -J. Schütte, Ann. Physik (Leipzig) **7**, 216 (1978).
- [167] P. Szlachetka i S. Kielich, *Photon Co- and Anti-correlations in Two-photon Raman Scattering*, VII INTERNATIONAL CONFERENCE ON RAMAN SPECTROSCOPY, OTTAWA 1980, red. W. F. Murphy, North Holland, Amsterdam, 1980.
- [168] P. Szlachetka, S. Kielich, J. Peřina i V. Peřinová, Optica Acta **27**, 1609 (1980).
- [169] W. Tänzler i F. -J. Schütte, Ann. Physik (Leipzig) **7**, 73 (1981).
- [170] P. Král, Czech. J. Phys. **40**, 1226 (1990).
- [171] H. Ritsch, M. A. M. Marte i P. Zoller, Europhys. Lett. **19**, 7 (1992).

- [172] J. Peřina, V. Peřinová i J. Kořousek, *Opt. Commun.* **49**, 210 (1984).
- [173] J. Peřinová, M. Kárská i J. Křepelka, *Acta Phys. Polonica* **A79**, 817 (1991).
- [174] J. Peřina i J. Křepelka, *J. Mod. Opt.* **38**, 2137 (1991).
- [175] J. Peřina i J. Křepelka, *J. Mod. Opt.* **39**, 1029 (1992).
- [176] R. Tanaš, w: *COHERENCE AND QUANTUM OPTICS V*, red. L. Mandel i E. Wolf, Plenum, New York, 1984, str. 645.
- [177] C. C. Gerry i S. Rodrigues, *Phys. Rev.* **A36**, 5444 (1987).
- [178] C. C. Gerry i E. R. Vrscaj, *Phys. Rev.* **A37**, 4265 (1988).
- [179] D. J. Daniel i G. J. Milburn, *Phys. Rev.* **A39**, 4628 (1989).
- [180] V. Buřek, *Phys. Lett.* **A136**, 188 (1989).
- [181] V. Peřinova i A. Lukš, *J. Mod. Opt.* **35**, 1513 (1988).
- [182] V. Peřinova i A. Lukš, *Phys. Rev.* **A41**, 414 (1990).
- [183] J. Peřina, R. Horák, Z. Hradil, C. Sibia i M. Bertolotti, *J. Mod. Opt.* **36**, 571 (1989).
- [184] V. Peřinova, A. Lukš i M. Kárská, *J. Mod. Opt.* **37**, 1055 (1990).
- [185] C. C. Gerry, *Phys. Rev.* **A35**, 2146 (1987).
- [186] C. C. Gerry, *Phys. Lett.* **A124**, 237 (1987).
- [187] D. Mihalache i D. Baboiu, *Phys. Lett.* **A159**, 303 (1991).
- [188] A. Mecozzi i P. Tombesi, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1055 (1987).
- [189] T. A. B. Kennedy i P. Drummond, *Phys. Rev.* **A38**, 1319 (1988).
- [190] G. J. Milburn, A. Mecozzi i P. Tombesi, *J. Mod. Opt.* **36**, 1607 (1989).

- [191] B. C. Sanders, Phys. Rev. A**39**, 4284 (1989).
- [192] B. C. Sanders, Phys. Rev. A**45**, 7746 (1992).
- [193] A. Vourdas i R. F. Bishop, Phys. Rev. A**39**, 214 (1989).
- [194] J. Sh. Averbukh i N. F. Perelman, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **95**, 818 (1989).
- [195] J. Sh. Averbukh i N. F. Perelman, Phys. Lett. A**139**, 449 (1989).
- [196] Ts. Gantsog i R. Tanaś, Phys. Rev. A **44**, 2086 (1991).
- [197] Ts. Gantsog i R. Tanaś, J. Mod. Opt. **38**, 1021 (1991).
- [198] Ts. Gantsog i R. Tanaś, Quantum Opt. **3**, 33 (1991).
- [199] M. J. Werner i H. Risken, Quantum Opt. **3**, 185 (1991).
- [200] M. Paprzycka i R. Tanaś, Quantum Opt. **4**, 331 (1992).
- [201] V. Bužek, A. Vidiella-Barranco i P. L. Knight, Phys. Rev. A**45**, 6570 (1992).
- [202] M. M. Brisudová, Phys. Rev. A**46**, 1696 (1992).
- [203] B. Wielinga i B. C. Sanders, J. Mod. Opt. A**40**, 1923 (1993).
- [204] K. Tara, G. S. Agarwal i S. Chaturvedi, Phys. Rev. A**47**, 5024 (1993).
- [205] C. C. Gerry i R. Grobe, Phys. Rev. A**49**, 2033 (1994).
- [206] K. Wódkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle i S. M. Barnett, Phys. Rev. A**35**, 2567 (1987).
- [207] A. Orłowski, P. Figurny i D. Burak, J. Mod. Opt. **38**, 2107 (1991).
- [208] E. Schrödinger, Naturwiss. **23**, 812 (1935).
- [209] P. Shanta, S. Chaturvedi, V. Srinivasan, G. S. Agarwal i C. I. Mehta, Phys. Rev. Lett. **72**, 1447 (1994).



- [210] I. M. Korobov, TRIGONOMETRIC SUMS AND THEIR APPLICATIONS, Nauka, Moskwa, 1981.
- [211] W. Leoński i R. Tanaś, Phys. Rev. A**49**, R20 (1994).
- [212] P. Adam, J. Janszky i An. V. Vinogradov, Opt. Commun. **80**, 155 (1990).
- [213] J. Janszky i An. V. Vinogradov, Phys. Rev. Lett. **64**, 2771 (1990).
- [214] J. Janszky, P. Domokos i P. Adam, Phys. Rev. A**48**, 2213 (1993).
- [215] L. Mandel, Proc. Phys. Soc. **72**, (1958) 1037; **74**, 233 (1959).
- [216] L. Mandel, Progress in Optics, red. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, **2**, 181 (1963).
- [217] J. Peřina i R. Horak, Opt. Commun. **1**, 91 (1969).
- [218] B. Saleh, PHOTOELECTRON STATISTICS, Springer Ser. Opt. Sci., t. 6, Springer, Berlin, 1978.
- [219] H. Paul, Rev. Mod. Phys. **54**, 1061 (1982).
- [220] A. Lukš, V. Peřinová i J. Peřina, Opt. Commun. **67**, 149 (1988).
- [221] R. Loudon, Opt. Commun. **70**, 109 (1989).
- [222] A. Lukš, V. Peřinová i Z. Hradil, Acta Phys. Polonica A**74**, 713 (1988).
- [223] E. Schrödinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. K**1**, 296 (1930).
- [224] M. Kozirowski i V. I. Man'ko, Opt. Commun. **69**, 71 (1988).
- [225] R. Tanaś i S. Kielich, Quantum Opt. **2**, 23 (1990).
- [226] A. Ekert i P. L. Knight, w: COHERENCE AND QUANTUM OPTICS VI, red. J. H. Eberly, L. Mandel i E. Wolf, Plenum, New York, 1990, str. 255.
- [227] S. Singh, Opt. Commun. **44**, 254 (1983).

- [228] X. T. Zhou i L. Mandel, Phys. Rev. **A41**, 475 (1990).
- [229] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **A114**, 243 (1927).
- [230] P. Carruthers i M. Nieto, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968).
- [231] S. M. Barnett i D. T. Pegg, J. Phys. **A19**, 3849 (1986).
- [232] R. Tanaś, J. Sov. Las. Res. **12**, 395 (1991).
- [233] M. M. Nieto, w: QUANTUM PHASE AND PHASE DEPENDENT MEASUREMENTS, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne Physica Scripta **T48**, 5 (1993).
- [234] S. M. Barnett i B. J. Dalton, w: QUANTUM PHASE AND PHASE DEPENDENT MEASUREMENTS, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne Physica Scripta **T48**, 13 (1993).
- [235] R. Lynch, *The quantum phase problem: A critical review*, Phys. Rep. ??? (1994).
- [236] QUANTUM PHASE AND PHASE DEPENDENT MEASUREMENTS, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne Physica Scripta **T48** (1993).
- [237] L. Susskind i J. Glogower, Physics **1**, 49 (1964).
- [238] J. C. Garrison i J. Wong, J. Math. Phys. **11**, 2242 (1970).
- [239] A. Galindo, Lett. Math. Phys. **8**, 495 (1984).
- [240] A. Galindo, **9**, 263 (1985).
- [241] V. N. Popov i V. S. Yarunin, Vestnik Leningrad University **N22**, 7 (1973).
- [242] V. N. Popov i V. S. Yarunin, J. Mod. Opt. **39** 1525 (1992).
- [243] A. L. Alimov i E. V. Damaskinsky, Theor. Math. Phys. **38**, 58 (1979).
- [244] H. Paul, Fortschr. Phys. **22**, 657 (1982).

- [245] J. M. Lévy-Leblond, *Ann. Phys.* **101**, 319 (1976).
- [246] D. T. Pegg i S. M. Barnett, *Europhys. Lett.* **6**, 483 (1988).
- [247] S. M. Barnett i D. T. Pegg, *J. Mod. Opt.* **36**, 7 (1989).
- [248] W. Schleich, H. Walther i J. A. Wheeler, *Found. Phys.* **18**, 953 (1988).
- [249] K. Wódkiewicz, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1064 (1984).
- [250] K. Wódkiewicz, *Phys. Lett.* **A115**, 304 (1991).
- [251] D. Burak i K. Wódkiewicz, *Phys. Rev.* **A46**, 2744 (1992).
- [252] J. W. Noh, A. Fougères i L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1426 (1991).
- [253] J. W. Noh, A. Fougères i L. Mandel, w: *QUANTUM PHASE AND PHASE DEPENDENT MEASUREMENTS*, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne *Physica Scripta T48*, 29 (1993).
- [254] H. Gerhardt, U. Büchler i G. Litfin, *Phys. Lett.* **A49**, 119 (1974).
- [255] H. Gerhardt, H. Welling i D. Frölich, *App. Phys.* **2**, 91 (1973).
- [256] D. R. Matthys i E. T. Jaynes, *J. Opt. Am. Soc.* **70**, 263 (1980).
- [257] M. M. Nieto, *Phys. Lett.* **A60**, 401 (1977).
- [258] J. M. Lévy-Leblond, *Phys. Lett* **64A**, 159 (1977).
- [259] R. Lynch, *J. Opt. Soc. Am.* **B4**, 1723 (1987).
- [260] R. Lynch, *Phys. Rev. A* **41**, 2841 (1990).
- [261] list A. Galindo do R. Lyncha, datowany 1990.11.30.
- [262] C. C. Gerry i K. E. Urbanski, *Phys. Rev. A* **42**, 662 (1990).
- [263] Y. K. Tsui i M. F. Reid, *Phys. Rev. A* **46**, 549 (1992).

- [264] A. Bandilla, *Opt. Commun.* **80**, 267 (1991).
- [265] J. W. Noh, A. Fougères i L. Mandel, *Phys. Rev. A* **46**, 2840 (1992).
- [266] J. W. Noh, A. Fougères i L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2579 (1993).
- [267] J. W. Noh, A. Fougères i L. Mandel, *Phys. Rev. A* **47**, 4535 (1993).
- [268] S. M. Barnett i D. T. Pegg, *Phys. Rev. A* **47**, 4537 (1993).
- [269] J. W. Noh, A. Fougères i L. Mandel, *Phys. Rev. A* **47**, 4541 (1993).
- [270] Z. Hradil, *Phys. Rev. A* **47**, 4532 (1993).
- [271] Z. Hradil i J. Bajer, *Phys. Rev. A*, ??? (1994).
- [272] J. W. Noh, A. Fougères i L. Mandel, *Phys. Rev. A* **45**, 424 (1992).
- [273] P. Riegler i K. Wódkiewicz, *Phys. Rev. A* **49**, 1387 (1994).
- [274] M. Freyberger i W. Schleich, *Phys. Rev. A* **47**, R30 (1993).
- [275] D. T. Smithey, M. Beck, M. Belsley i M. G. Raymer, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2650 (1993).
- [276] D. T. Smithey, M. Beck, J. Cooper i M. G. Raymer, *Phys. Rev. A* **48**, 3159 (1993).
- [277] **A. Miranowicz**, K. Piątek i R. Tanaś, *Coherent states in a finite dimensional Hilbert space*, artykuł wysłany do *Phys. Rev. A* (1994).
- [278] R. Loudon, *THE QUANTUM THEORY OF RADIATION*, University Press, Oxford, 1973, str. 143.
- [279] J. M. Lévy-Leblond, *Revista Mexicana de Fisica*, **22**, 15 (1973).
- [280] A. S. Dawydow, *MECHANIKA KWANTOWA*, PWN, Warszawa, 1967.
- [281] I. Białynicki-Birula i Z. Białynicka-Birula, *ELEKTRODYNAMIKA KWANTOWA*, PWN, Warszawa, 1974; *QUANTUM ELECTRODYNAMICS*, Pergamon Press, 1975.

- [282] K. Maurin, METODY PRZESTRZENI HILBERTA, PWN, Warszawa, 1959.
- [283] W. Mlak, WSTĘP DO TEORII PRZESTRZENI HILBERTA, PWN, Warszawa, 1982.
- [284] T. S. Santhanam, Phys. Lett. **A56**, 345 (1976).
- [285] T. S. Santhanam i K. B. Sinha, Aust. J. Phys. **31**, 233 (1978).
- [286] D. T. Pegg, J. A. Vaccaro i S. M. Barnett, J. Mod. Opt. **37**, 1703 (1990).
- [287] H. T. Dung, R. Tanaś, i A. S. Shumovsky, Opt. Commun. **79**, 462 (1990).
- [288] P. A. Lakshmi i S. Swain, Phys. Rev. A **42**, 5632 (1990).
- [289] H. T. Dung, R. Tanaś i A. S. Shumovsky, J. Mod. Opt. **38**, 2069 (1991).
- [290] E. I. Aliskenderov, H. T. Dung i A. S. Shumovsky, Quantum Opt. **3**, 241 (1991).
- [291] H. T. Dung, R. Tanaś i A. S. Shumovsky, Quantum Opt. **3**, 255 (1991).
- [292] Ts. Gantsog i R. Tanaś, J. Mod. Opt. **38**, 1537 (1991).
- [293] Ts. Gantsog i R. Tanaś, Phys. Lett. A **152**, 251 (1991).
- [294] Ts. Gantsog i R. Tanaś, Phys. Lett. A **157**, 330 (1991).
- [295] Ts. Gantsog, R. Tanaś i R. Zawodny, Opt. Commun. **82**, 345 (1991).
- [296] R. Tanaś i Ts. Gantsog, J. Opt. Soc. Am. B **8**, 2505 (1991).
- [297] R. Tanaś, Ts. Gantsog i R. Zawodny, Opt. Commun. **83**, 278 (1991).
- [298] R. Tanaś, Ts. Gantsog i R. Zawodny, Quantum Opt. **3**, 221 (1991).
- [299] M. Orszag i C. Saavedra, Phys. Rev. A **43**, 554 (1991).
- [300] M. Orszag i C. Saavedra, Phys. Rev. A **43**, 2557 (1991).
- [301] R. Nath i P. Kumar, J. Mod. Opt. **38**, 1665 (1991).
- [302] J. -S. Peng i G. -K. Li, Phys. Rev. A **45**, 3289 (1992).

- [303] Ts. Gantsog, R. Tanaś i R. Zawodny, Phys. Lett. A **155**, 1 (1991).
- [304] R. Tanaś i Ts. Gantsog, Phys. Rev. A **45** 5031 (1992).
- [305] J. Eiselt i H. Risken, Phys. Rev. A **43**, 346 (1991).
- [306] A. Lonke, J. Math. Phys. **19**, 1110 (1978).
- [307] W. K. Wootters, Ann. Phys. **176**, 1 (1987).
- [308] J. A. Vaccaro i D. T. Pegg, Phys. Rev. A **41** 5156 (1990).
- [309] A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. **26**, 222 (1972).
- [310] J. M. Radcliffe, J. Phys. A**4**, 313 (1971).
- [311] C. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore i H. Thomas, Phys. Rev A**6**, 2211 (1972).
- [312] T. S. Santhanam, *Generalized coherent states*, w: SYMMETRIES IN SCIENCE, red. B. Gruber i S. Millmann, Plenum, 1980, str. 337.
- [313] K. Wódkiewicz i J. H. Eberly, J. Opt. Soc. Am. B. **2**, 458 (1985).
- [314] A. Orłowski i K. Wódkiewicz, J. Mod. Opt. **37**, 295 (1990).
- [315] E. R. Hansen, A TABLE OF SERIES AND PRODUCTS, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [316] J. M. Jauch, FOUNDATIONS OF QUANTUM MECHANICS, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Massachusetts 1968.
- [317] E. Merzbacher, QUANTUM MECHANICS, J. Wiley and Sons Pub., New York, 1970.
- [318] E. V. Damaskinsky i V. S. Yarunin, Izvestia VUZ Tomsk University **6**, 59 (1978).
- [319] J. Spanier i K. B. Oldham, AN ATLAS OF FUNCTIONS, Hemisphere Pub., Washington, 1987.

- [320] N. Grønbech-Jensen, P. L. Christiansen i P. S. Ramanujam, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2423 (1989).
- [321] J. A. Vaccaro i D. T. Pegg, *Opt. Commun.* **70**, 529 (1989).
- [322] S. M. Barnett i D. T. Pegg, *J. Mod. Opt.* **39**, 2121 (1992).
- [323] W. Schleich, R. J. Horowicz i S. Varro, *Phys. Rev. A* **40**, 7405 (1989).
- [324] W. Schleich, R. J. Horowicz i S. Varro, w: *QUANTUM OPTICS V*, red. J. D. Harvey i D. F. Walls, Springer, Berlin (1989) str. 133.
- [325] W. Schleich, A. Bandilla i H. Paul, *Phys. Rev. A* **45**, 6652 (1992).
- [326] M. Freyberger, K. Vogel i W. Schleich, *Quantum Opt.* **5**, 65 (1993).
- [327] M. Garraway i P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **46**, R5346 (1992).
- [328] M. Garraway i P. L. Knight, w: *QUANTUM PHASE AND PHASE DEPENDENT MEASUREMENTS*, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne *Physica Scripta* **T48**, 66 (1993).
- [329] G. S. Agarwal, S. Chaturvedi, K. Tara i V. Srinivasan, *Phys. Rev. A* **36**, 4904 (1992).
- [330] A. Orłowski i A. Wünsche, *Phys. Rev. A* **48**, 4679 (1993).
- [331] S. L. Braunstein i C. M. Caves, *Phys. Rev. A* **42**, 4115 (1990).
- [332] R. Tanaś i Ts. Gantsog, *Phys. Rev. A* **45**, 5031 (1992).
- [333] C. C. Gerry, *Opt. Commun.* **63**, 278 (1987).
- [334] R. Lynch, *Opt. Commun.* **67**, 67 (1988).
- [335] C. C. Gerry, *Opt. Commun.* **75**, 168 (1990).
- [336] B. C. Sanders, S. M. Barnett i P. L. Knight, *Opt. Commun.* **58**, 290 (1986).

- [337] D. Yao, Phys. Lett. A**122**, 77 (1987).
- [338] Fan Hong-Yi i H. R. Zaidi, Opt. Commun. **68**, 143 (1988).
- [339] D. Cohen, Y. Ben-Aryeh i A. Mann, Opt. Commun. **94**, 227 (1992).
- [340] W. P. Schleich, J. P. Dowling, R. J. Horowicz i S. Varro, w: NEW FRONTIERS IN QUANTUM ELECTRODYNAMICS AND QUANTUM OPTICS, red. A. O. Barut, Plenum Press, New York (1990) str. 31.
- [341] W. Schleich i J. A. Wheeler, Nature **326**, 574 (1987).
- [342] S. M. Barnett, S. Stenholm i D. T. Pegg, Opt. Commun. **73**, 314 (1989).
- [343] G. J. Milburn i C. A. Holmes, Phys. Rev. Lett. **56**, 2237 (1986).
- [344] N. Lu, Phys. Rev. A **42**, 5641 (1990).
- [345] D. A. Long i L. Stanton, Proc. Roy. Soc. London **A318**, 441 (1970).
- [346] P. Figurny, A. Orłowski i K. Wódkiewicz, Phys. Rev A**47**, 5151 (1993).
- [347] A. M. Perelomov, Sov. Phys. Usp. **20**, 703 (1977).
- [348] S. M. Barnett i D. T. Pegg, Phys. Rev. A **42**, 6713 (1990).



# INDEKS CYTOWAŃ

luty 1994

1 A. Miranowicz, R. Tanaś i S. Kielich:

*Generation of discrete superpositions of coherent states in the anharmonic oscillator model*, *Quantum Opt.* **2** (1990) 253.

1. M. J. WERNER i H. RISKEN: “Q-function for the Jaynes-Cummings model with an additional Kerr-medium”, *Quantum Opt.* **3** (1991) 185.
2. A. D. WILSON-GORDON, V. BUŽEK i P. L. KNIGHT: “Statistical and phase properties of displaced Kerr states”, *Phys. Rev.* **A44** (1991) 7647.
3. S. P. NIKITIN i A. V. MASALOV: “Quantum state evolution of the fundamental mode in the process of second-harmonic generation”, *Quantum Opt.* **3** (1991) 105.
4. K. J. BLOW, R. LOUDON i S. J. D. PHOENIX: “Quantum theory of nonlinear loop mirrors”, *Phys. Rev.* **A45** (1992) 8064.
5. V. BUŽEK, A. VIDIELLA-BARRANCO i P. L. KNIGHT: “Superpositions of coherent states: Squeezing and dissipation”, *Phys. Rev.* **A45** (1992) 8190.
6. V. BUŽEK, H. MOYA-CESSA, P. L. KNIGHT i S. J. D. PHOENIX: “Schrödinger-cat states in the resonant Jaynes-Cummings model: Collapse and revival of oscillations of the photon-number distribution”, *Phys. Rev.* **A45** (1992) 8190.
7. M. M. BRISUDOVÁ: “Creating multiphase coherent states in a damped anharmonic oscillator”, *Phys. Rev.* **A46** (1992) 1696.
8. B. C. SANDERS: “Superpositions of distinct phase states by a nonlinear evolution”, *Phys. Rev.* **A45** (1992) 7746.
9. M. S. KIM i V. BUŽEK: “Photon statistics of superposition states in phase-sensitive reservoirs”, *Phys. Rev.* **A47** (1993) 610.

10. J. PEŘINA, J. BAJER, V. PEŘINOVÁ i Z. HRADIL: “Photon statistics of non-classical fields” in ”Modern Nonlinear Optics. Prigogine and Rice Series”, tom **85 A**, red. M. W. Evans i S. Kielich, J. Wiley and Sons Pub. (1993) str. 405–459.
11. I. FÖLDESI, P. ADAM i J. JANSZKY: “Antisymmetric straight-line superposition of coherent states”, *Phys. Lett. A***173** (1993) 97.
12. M. S. KIM i V. BUŽEK: “Schrödinger-cat states at finite temperature – influence of a finite-temperature heat bath on quantum interferences”, *Phys. Rev. A***46** (1992) 4239.
13. M. BAN: “SU(1,1) Lie algebraic approach to linear dissipative processes in quantum optics”, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 3213.
14. A. VOUDAS: “Superpositions of macroscopically distinguishable states in the presence of thermal noise”, *Opt. Commun.* **91** (1992) 236.
15. B. C. SANDERS: “Entangled coherent states”, *Phys. Rev. A***45** (1992) 6811.
16. V. BUŽEK i B. HLADKÝ: “Macroscopic superposition states of light via two-photon resonant interaction of atoms with cavity field.”, *J. Mod. Opt.* **40** (1993) 1309.
17. V. BUŽEK, TS. GANTSOG i M. S. KIM: “Phase properties of Schrödinger cat states of light decaying in phase-sensitive reservoirs”, w: ”Quantum Phase and Phase Dependent Measurements”, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne *Physica Scripta* T**48** (1993) 131.
18. V. PEŘINOVÁ i J. KŘEPELKA: “Free and Dissipative Evolution of Squeezed and Displaced Number States in the 3rd-Order Nonlinear Oscillator”, *Phys. Rev. A***48** (1993) 3881.
19. J. JANSZKY, P. DOMOKOS i P. ADAM: “Coherent States on a Circle and Quantum Interference”, *Phys. Rev. A***48** (1993) 2213.
20. B. WIELINGA i B. C. SANDERS: “Entangled coherent states with variable weighting”, *J. Mod. Opt.* **A40** (1993) 1923.

21. C. C. GERRY i R. GROBE: “Statistical properties of squeezed Kerr states”, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 2033.
  22. P. ADAM, I. FÖLDESI i J. JANSZKY: “Complete basis set via straight-line coherent-state superposition”, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 1281.
- 2** R. Tanaś, A. Miranowicz i S. Kielich:  
*Squeezing and its graphical representations in the anharmonic oscillator model*, *Phys. Rev. A* **43** (1991) 4014.
1. K. J. BLOW, R. LOUDON i S. J. D. PHOENIX: “Quantum theory of nonlinear loop mirrors”, *Phys. Rev. A* **44** (1991) 7647.
  2. J. PEŘINA, J. BAJER, V. PEŘINOVÁ i Z. HRADIL: “Photon statistics of non-classical fields” in ”Modern Nonlinear Optics. Prigogine and Rice Series”, tom **85 A**, red. M. W. Evans i S. Kielich, J. Wiley and Sons Pub. (1993) str. 405–459.
  3. A. LUIS i L. L. SÁNCHEZ-SOTO: “Breaking the standard quantum limit for interferometric measurements”, *Opt. Commun.* **89** (1992) 140.
- 3** R. TANAŚ, TS. GANTSOG, A. MIRANOWICZ i S. KIELICH:  
*The quasiprobability distribution  $Q(\alpha, \alpha^*)$  versus the phase distribution  $P(\theta)$  in description of superpositions of coherent states*, *J. Opt. Soc. Am. B* **8** (1991) 1576–1582.
1. B. M. GARRAWAY i P. L. KNIGHT: “Quantum phase distributions and quasidistributions” *Phys. Rev. A* **46** (1992) 5346.
  2. HO TRUNG DUNG i A. S. SHUMOVSKY: “Quantum phase fluctuations in the Jaynes-Cummings model: effects of cavity damping” *Phys. Lett.* **169A** (1992) 379.
  3. B. M. GARRAWAY i P. L. KNIGHT: “Quantum superpositions, phase distributions and *quasi*-probabilities”, w: ”Quantum Phase and Phase Depen-

dent Measurements”, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne *Physica Scripta* T48 (1993) 66.

4. J. PEŘINA, J. BAJER, V. PEŘINOVÁ i Z. HRADIL: “Photon statistics of non-classical fields” in ”Modern Nonlinear Optics. Prigogine and Rice Series”, tom 85 A, red. M. W. Evans i S. Kielich, J. Wiley and Sons Pub. (1993) str. 405–459.
5. S. M. BARNETT i B. J. DALTON: “Conceptions of quantum optical phase”, w: ”Quantum Phase and Phase Dependent Measurements”, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne *Physica Scripta* T48 (1993) 13.
6. K. TARA, G. S. AGARWAL i S. CHATURVEDI: “Production of Schödinger macroscopic quantum-superposition states in a Kerr medium”, *Phys. Rev. A*47 (1993) 5024.
7. V. PEŘINOVÁ i J. KŘEPELKA: “Free and Dissipative Evolution of Squeezed and Displaced Number States in the 3rd-Order Nonlinear Oscillator”, *Phys. Rev. A*48 (1993) 3881.
8. C. C. GERRY i R. GROBE: “Statistical properties of squeezed Kerr states”, *Phys. Rev. A*49 (1994) 2033.
9. P. SHANTA, S. CHATURVEDI, V. SRINIVASAN, G. S. AGARWAL i C. L. MEHTA: “Unified approach to multiphoton coherent states”, *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994) 1447.

4 Ts. GANTSOG, A. MIRANOWICZ i R. TANAŚ:

*Phase properties of real field states: the Garrison-Wong versus Pegg-Barnett predictions*, *Phys. Rev. A*, 46 (1992) 2870–2876.

1. S. M. BARNETT i D. T. PEGG: “Limiting procedures for the optical phase operator”, *J. Mod. Opt.* 39 (1992) 2121.
2. A. LUIS i L. L. SÁNCHEZ-SOTO: “Canonical transformations to action and phase-angle variables and phase operators”, *Phys. Rev. A*48 (1993) 752.

3. HO TRUNG DUNG i A. S. SHUMOVSKY: "Quantum phase fluctuations in the Jaynes-Cummings model: effects of cavity damping", *Phys. Lett.* **169A** (1992) 379.
4. S. M. BARNETT i B. J. DALTON: "Conceptions of quantum optical phase", w: "Quantum Phase and Phase Dependent Measurements", red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne *Physica Scripta* T**48** (1993) 13.
5. R. LYNCH: "The quantum phase problem", *Phys. Rep.* (1994) ???.
6. M. M. NIETO: "Quantum phase and quantum phase operators: some physics and some history", w: "Quantum Phase and Phase Dependent Measurements", red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne *Physica Scripta* T**48** (1993) 5.
7. C. A. NELSON i M. H. FIELDS: "Number and phase uncertainties of the  $q$ -analogue quantized field", (1994), w druku.

5 R. TANAŚ, A. MIRANOWICZ i Ts. GANTSOG:

*Phase distributions of real field states*, w: QUANTUM PHASE AND PHASE DEPENDENT MEASUREMENTS, red. W. P. Schleich i S. M. Barnett, wydanie specjalne *Physica Scripta* T**48**, 53 (1993).

1. V. PEŘINOVÁ i J. KŘEPELKA: "Free and Dissipative Evolution of Squeezed and Displaced Number States in the 3rd-Order Nonlinear Oscillator", *Phys. Rev. A* **48** (1993) 3881.
2. R. LYNCH: "The quantum phase problem", *Phys. Rep.* (1994) ???.